

Markowitz

Il modello Media-Varianza e la diversificazione di portafoglio

di Matteo Maggio

Indice

I. Introduzione: il “rischio”, il “rendimento” e la teoria di portafoglio	pag. 3
II. L’Asset Allocation Strategica: il modello di Markowitz	pag. 7
II.I Il modello di Markowitz e l’Utilità Attesa	pag. 8
II.II La frontiera efficiente	pag. 10
II.III La funzione delle preferenze nel modello	pag. 10
III. Il modello di Markowitz e la diversificazione	pag. 11
Bibliografia	pag. 13

I. Introduzione: il “rischio”, il “rendimento” e la teoria di portafoglio

La teoria del portafoglio si propone di guidare la scelta degli investimenti mediante la creazione di un portafoglio che massimizzi il **profitto** una volta fissato un livello di **rischio**.

Da un punto di vista accademico, gli inizi possono essere fatti risalire allo scritto del 1952 di Harry Markowitz¹ che arriva a definire il portafoglio ottimo sulla base, da un lato, del criterio media-varianza e, dall'altro della funzione di utilità dell'investitore.

Egli fece l'apparentemente semplice osservazione che gli operatori finanziari non cercano necessariamente di massimizzare il solo rendimento: se fossero solamente interessati alla massimizzazione del rendimento, tenderebbero a detenere unicamente quella singola attività finanziaria che ritengono offra il più alto rendimento futuro; al contrario, osservò Markowitz, normalmente essi detengono portafogli di titoli, cioè insieme di attività finanziarie acquistate secondo un determinato rapporto rispetto all'investimento totale.

La spiegazione di questo comportamento risiede nel fatto che gli investitori prestano attenzione sia al rendimento delle loro attività ma anche al rischio che corrono nel detenerle, e la “diversificazione” può essere una strategia capace di ridurre l'azzardo senza portare considerevoli modifiche ai proventi che ne derivano. Il modello di Markowitz fornisce, quindi, un metodo per l'identificazione di set di portafogli *efficienti* in base al criterio della “media-varianza”, composti da titoli contenuti nell'universo delle attività con rendimento soggetto a rischio. Tale modello richiede che vengano stimate la media e la deviazione standard dei rendimenti previsti per l'intero universo dei titoli, e che vengano, inoltre, determinati i parametri di variabilità congiunta, covarianza o coefficiente di correlazione lineare, per ogni coppia di titoli.

In conclusione, al fine di valutare oggettivamente, e comparare i vari modi alternativi di impiegare i propri capitali, gli operatori finanziari devono essere in grado

¹ Markowitz H. (1952), “*Portfolio Selection*”, *Journal of Finance*, pp. 77-91.

di quantificare le due caratteristiche fondamentali di ogni investimento: il rischio² e il rendimento, ovvero la deviazione standard dei rendimenti come misura del rischio e la media di questi come misura del rendimento.

Innanzitutto, distinguiamo la misurazione del rendimento e del rischio ex-post (calcolati, cioè, sui dati storici) dalla loro quantificazione ex-ante³.

Per misurare correttamente i rendimenti ex-post originati da un investimento si deve tener conto sia delle variazioni di prezzo dell'attività, sia dei flussi di cassa generati dall'attività durante il periodo di detenzione: per le azioni, per esempio, il rendimento in un particolare periodo di tempo è uguale alla somma della variazione di prezzo più i dividendi riscossi, divisa per il prezzo all'inizio di tale periodo di riferimento; per le obbligazioni, il rendimento periodale è dato dalla variazione di prezzo più gli interessi ricevuti in quel periodo, divisi per il prezzo iniziale.

Il concetto di rischio è più complesso e ha molte connotazioni. Nel campo degli investimenti, con il passare del tempo, tale concetto si è evoluto. Ai primi del Novecento, gli analisti tendevano a concentrarsi sui bilanci per stimare il rischio dei titoli: più alto era il grado di indebitamento di una azienda, più rischioso veniva considerato il titolo da questa emesso.

Nell'edizione del 1962 della loro *Security Analysis*⁴, Graham, Dodd e Cottle definirono come misura del rischio⁵ il "margine di sicurezza". Tale margine non si basava sui bilanci ma piuttosto sulla differenza tra i prezzi di mercato e i valori intrinseci⁶ delle azioni. Fondamentalmente, essi sostenevano che l'analista dovesse stimare indipendentemente il valore intrinseco di un titolo senza considerare il prezzo

² "Si dice rischiosa una qualunque situazione che possa dar luogo a una riduzione del valore delle attività in portafoglio e/o un aumento delle passività". Cerca: Cesari R. (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica. Mercati azionari, rischi e portafogli", McGraw-Hill, pag. 91.

³ Fuller R. J., Farrell J. L. (1993), "Analisi degli investimenti finanziari", McGraw-Hill.

⁴ Graham B., Dodd D. e Cottle S. (1962), "Security Analysis", McGraw-Hill, 4 ed.

⁵ Bisogna precisare che di classificazioni di rischio, come del resto le sue misure, ce ne sono innumerevoli: dalla distinzione di rischi interni ed esterni, alla qualificazione del tipo di rischio tra "di mercato" e "non di mercato"; ovvero, in base alla distinzione della fonte di rischio. Per una sua misura, ricordiamo tra le altre: la semi-deviazione standard e la downside-deviazione standard. Per approfondimenti vedi Cesari R. (2012), op. cit.

⁶ Il "valore intrinseco" può essere definito come il valore che un analista attribuirebbe a un titolo in base alla sua capacità di produrre utili e alle sue caratteristiche finanziarie, senza riguardo al suo valore di mercato. Vedi Graham, Dodd e Cottle (1962), op cit, pag. 34.

corrente di mercato. La differenza tra il valore intrinseco e il prezzo di mercato rappresentava una misura del rischio: più ampio è il margine di sicurezza, più basso risulta il rischio ad esso associato. Comunque, Graham e Dodd riconoscevano l'importanza del contributo di ogni singolo titolo al rischio complessivo di un portafoglio ben diversificato.

Ma, come già accennato, era già stato il lavoro di Markowitz, e la sua successiva evoluzione nel "Capital Asset Pricing Model", a definire con più precisione il concetto di rischio per i portafogli e per i singoli titoli. Markowitz individuò la sua definizione associando il rischio di un investimento alla variabilità dei tassi di rendimento: più è variabile il rendimento, più rischioso è l'investimento. La deviazione standard rappresenta una possibile misura di questa variabilità.

Il rendimento medio storico e la relativa deviazione standard del titolo sono preziose informazioni che ogni investitore deve tener conto quando decide di acquistarlo.

Ad ogni modo, le informazioni veramente cruciali sono le attese dell'investitore circa i futuri rendimenti che il titolo potrà generare: in base a queste aspettative gli operatori decideranno cosa e quando acquistare o vendere.

Le aspettative sul futuro sono perciò la principale forza che sta alla base dei movimenti dei prezzi dei titoli. L'ipotesi sottostante ad esse si fonda sul fatto che gli operatori conoscano tutti gli scenari possibili e la distribuzione di probabilità del verificarsi di tali scenari. Quindi, definiamo valore atteso dei rendimenti ex-ante come la media ponderata dei rendimenti condizionati dove i pesi sono le probabilità che ciascun scenario ha di verificarsi; inoltre, definiremo deviazione standard ex-ante come la media ponderata degli scarti potenziali dal rendimento previsto.

Definiamo, infine, il rendimento di portafoglio come la media ponderata dei rendimenti r_i dei titoli detenuti in portafoglio, i cui pesi (le ponderazioni, w_i) indicano le quote relative dei titoli:

$$r_P = \sum_i^n w_i r_i$$

per i rendimenti ex-post;

$$E(r_p) = \sum_i^n w_i E(r_i)$$

per i rendimenti ex-ante.

Il calcolo della varianza di portafoglio (la sua deviazione standard non è altro che la radice quadrata della varianza) invece non è così immediato. Essa è definibile come la somma di tutti i possibili termini delle covarianze tra i rendimenti delle attività prese due a due ciascun termine moltiplicato con il prodotto dei rispettivi pesi, ovvero è la somma di tutte le varianze di ogni attività in portafoglio ponderate con il quadrato dei pesi (le quote relative dei titoli detenuti) a cui va aggiunto il doppio della somma dei termini⁷ unici di covarianza moltiplicati per il prodotto dei pesi:

$$\sigma_p^2 = \sum_i^n [\sigma_i^2 w_i^2 + 2 \cdot \sum_j^{(n^2-n)/2} cov_{ij} w_i w_j]$$

⁷ Per n titoli, essi sono $(n^2 - n)/2$.

II. L'Asset Allocation Strategica: il modello di Markowitz

Il processo di scelta del portafoglio di un investitore si esplica in diversi passi.

Si tratta di individuare:

- l'orizzonte temporale di investimento (*horizon selection*);
- l'insieme dei mercati rilevanti da prendere in esame (*market finding*);
- il peso percentuale da assegnare a ogni mercato (*market sizing*);
- i singoli titoli da acquistare in portafoglio e le loro quantità (*portfolio selection*).

L'insieme di questi "steps" creano la cosiddetta "Asset Allocation Strategica" (AAS), vale a dire l'insieme delle scelte fondamentali che caratterizzano un investimento finanziario.

Questa dinamica prevede l'iniziale decisione dell'orizzonte temporale dell'investimento selezionato da un operatore, orizzonte che può essere di tipo breve o di tipo medio-lungo: è una decisione cruciale per il raggiungimento dell'obiettivo prefissato, che dipende dalle caratteristiche dell'investitore e dagli obiettivi specifici che gli ha.

Dopo l'orizzonte temporale, il secondo aspetto preliminare consiste nell'individuazione dei mercati su cui l'investitore ritiene di poter investire. Tale decisione può essere o *esclusiva*, se riferita ai mercati o settori di mercato da non prendere in considerazione, o *inclusiva*, se si fa riferimento ai mercati da considerare.

Infine, è rilevante definire quali, e in che quantità, acquistare i titoli che realizzeranno il proprio portafoglio, e di questa decisione se ne occupa la teoria di portafoglio.

Come detto nel precedente paragrafo, tra le prime forme (modelli) di tale teoria è da annoverare l'approccio "media-varianza" di Markowitz, che prende in considerazione i rendimenti attesi e la loro volatilità, in modo tale da riflettere gli andamenti previsti sull'orizzonte di investimento futuro. Sulla base di queste ipotesi, l'investitore sceglie un proprio portafoglio ottimale valutando il doppio criterio del massimo rendimento atteso e della minima volatilità: il solo primo criterio porterebbe a scegliere la classe di attività

con il più alto rendimento atteso, indipendentemente dalla volatilità; il solo secondo criterio spingerebbe a preferire le obbligazioni a breve per il loro bassissimo rischio. La scelta corretta, dal punto di vista della razionalità economica, consiste nel trovare il mix, cioè il portafoglio ottimo, che contenga queste due caratteristiche, tra loro opposte sia in termini di teoria finanziaria sia in termini di osservazione empirica: al crescere del rendimento cresce anche la volatilità.

Altra peculiarità che prende in considerazione il decidere per la selezione di portafoglio riguarda il calcolo della correlazione tra i titoli. Sotto l'ipotesi che i titoli abbiano un tipo di relazione lineare, il coefficiente di correlazione del Pearson risulta essere ottimale per determinare la relazione tra i rendimenti dei titoli, presi due a due. Esso varia tra +1 e -1, rappresentando i casi estremi di perfetta correlazione lineare diretta e, rispettivamente, perfetta correlazione lineare inversa; il caso in cui tale coefficiente fosse nullo questo indicherebbe una certa indipendenza, o non correlazione, tra i titoli.

Si considerino, ora, N titoli. Il modello di Markowitz si sviluppa in 3 momenti:

1. stima di medie, varianze e covarianze dei tassi di rendimento degli N titoli;
2. costruzione della frontiera efficiente;
3. scelta del portafoglio ottimo in base alle preferenze dell'investitore.

II.1 modello di Markowitz e l'Utilità Attesa

Seguendo Markowitz⁸⁹, il punto di partenza è la massimizzazione dell'utilità attesa della ricchezza futura, W^e , definita da

$$W^e = W_0(1 + \sum_{i=1}^N w_i r_i) \equiv W_0(1 + r_p)$$

⁸ Markowitz H. (1952), "Portfolio Selection", Journal of Finance, 7, 77-91.

⁹ Markowitz H. (1959), "Portfolio Selection: efficient diversification of investments", Wiley.

dove W_0 è la ricchezza investibile corrente, gli r_i sono i tassi di rendimento totali di periodo degli N titoli, gli w_i sono i pesi percentuali da segnare in modo ottimale a ogni titolo e r_p è il rendimento del portafoglio come media aritmetica ponderata dei rendimenti degli N titoli: il vettore dei pesi (w_1, w_2, \dots, w_N) rappresenta l'obiettivo da determinare.

Il problema di massimizzazione è pertanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \max E[U(W^e)] \\ W^e = W_0(1 + r_p) \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} \right.$$

Dato che il rendimento aleatorio dell' i -esimo titolo è caratterizzato da una media μ e da una varianza σ^2 e da una covarianza con i restanti $N - 1$ titoli, nell'ipotesi di funzione di utilità quadratica¹⁰, il modello si semplifica nella massimizzazione dell'utilità *indiretta* di media e varianza di portafoglio, cioè il problema di massimizzazione dell'Utilità Attesa in forma matriciale è espresso dal seguente sistema

$$\begin{array}{l} \max f(\mu, \sigma^2) \\ \left\{ \begin{array}{l} \mu_p = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \\ \sigma_p^2 = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

dove in neretto esprimiamo le variabili in termini matriciali, usando l'apice ' come segno di trasposta, $\mathbf{1}$ come vettore colonna $N \times 1$ di unità, $\boldsymbol{\mu}$ come vettore dei rendimenti e $\boldsymbol{\Sigma}$ come matrice varianze-covarianze, matrice simmetrica, definita positiva, di dimensione $N \times N$, contenente le N varianze sulla diagonale principale e le $N(N-1)/2$ covarianze sulla parte triangolare superiore (e per simmetria, inferiore).

¹⁰ Markowitz fu il primo a sviluppare tale modello, considerando la funzione di utilità quadratica come approssimazione a una generica utilità del tipo "von Neumann-Morgenstern Utility".

II.2 La frontiera efficiente

Markowitz chiarisce che il suddetto sistema si risolve passando attraverso un sottoinsieme significativo che utilizza il requisito per cui la media dei rendimenti, μ , ha un effetto positivo sull'utilità, mentre la varianza, σ^2 , un effetto negativo. In tal caso, a parità di media (ponendo $\mu_p = \mu_0$), l'operatore finanziario sceglierà necessariamente i portafogli di minima varianza σ_p^2 , e, a parità di varianza (ponendo $\sigma_p^2 = \sigma_0^2$), i portafogli di massima media μ_p (approccio "duale" al precedente), con l'obiettivo di determinare il vettore dei pesi w ottimale.

Nello spazio (σ_p^2, μ_p) l'equazione in w che risolve il sistema descrive una parabola, mentre nello spazio (σ_p, μ_p) essa rappresenta un'iperbole. Da tale curva si ricava la "frontiera efficiente".

Un investitore con attitudine per la media (i rendimenti) e repulsione per la sua volatilità (il rischio), qualunque sia la sua specifica funzione di utilità, preferirà un portafoglio su tale curva: i punti al di sopra di tale frontiera sono portafogli impossibili da ottenere, poiché per costruzione, per una data media, non ci sono portafogli con volatilità inferiore a quella espressa sulla frontiera; mentre i punti al di sotto di essa rappresentano portafogli possibili ma *inefficienti*, poiché esisterà sempre un portafoglio migliore, cioè con rendimento maggiore a parità di rischio, ovvero con rischio minore a parità di rendimento.

II.3 La funzione delle preferenze nel modello

Sulla *frontiera efficiente* vi sono infiniti portafogli, e per determinare il portafoglio ottimale di un tipico operatore dobbiamo introdurre la funzione di utilità. Se $f(\sigma_p^2, \mu_p)$ è la funzione di utilità *indiretta*, le curve di *isoutilità* sono espressione, nello spazio (σ_p^2, μ_p) , di tutte le combinazioni di volatilità e media che danno lo stesso livello di utilità all'investitore.

Il collegamento delle informazioni provenienti dai mercati, e riassunte nella frontiera efficiente, e delle informazioni sulle preferenze dell'investitore, riprese nelle curve di indifferenza, consente di definire la soluzione del problema di Markowitz: il *portafoglio ottimo* è quello che sta sulla frontiera e sulla più alta curva di isoutilità.

Il portafoglio ottimo risulta, quindi, il portafoglio tangente tra la frontiera efficiente e la famiglia di curve di isoutilità. Tale portafoglio è la soluzione del problema di Asset Allocation Strategica (AAS) del singolo operatore, accennata precedentemente.

III. modello di Markowitz e la diversificazione

Anche per chi la finanza rimane una materia poco chiara, il pensare di non impiegare tutta la propria ricchezza su un unico titolo appare come una strategia ragionevole, e istintivamente spontanea: gli operatori finanziari comunque specificatamente redistribuiscono la propria ricchezza su un gran numero di prodotti finanziari, creando portafogli di titoli "diversificati".

Questo significa che, ingrossando il numero dei titoli tenuti nel portafoglio, cioè al crescere di N , la parte di rischio individuata dalla rischiosità propria dei titoli (la loro deviazione standard, o la varianza di questi) tende a ridursi, ma rimane il rischio legato alle tendenze sincroniche con gli altri titoli (le loro covarianze). La prima tipologia di rischio è di tipo diversificabile, *rischio specifico*, e può essere ridotto (fino quasi ad eliminarlo) con un'accurata politica di diversificazione di portafoglio; la seconda tipologia è invece non diversificabile, *rischio sistematico*, e non può essere eliminata dalla semplice diversificazione, poiché consistente nel rischio dovuto a variazioni delle condizioni di mercato che colpiscono tutti i titoli contemporaneamente.

Comunque, diversificare porta dei benefici sulla strategia di investimento in titoli finanziari.

Riproduciamo qui di seguito l'indice di rischiosità (la varianza) per un portafoglio di N titoli:

$$\sigma_P^2 = \sum_i^n [\sigma_i^2 w_i^2 + 2 \cdot \sum_j^{(n^2-n)/2} cov_{ij} w_i w_j]$$

e ipotizziamo che tale portafoglio sia "ben diversificato" ponendo i vari w_i uguali a $1/N$. Dopodiché, distinguiamo il termine di varianza, TV , che dà il senso del rischio specifico, da quello di covarianza, TC , espressione del rischio sistematico.

Il primo sarà:

$$TV = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

mentre, il secondo sarà:

$$TC = (1 - \frac{1}{N})C_P$$

dove C_P è la covarianza media di portafoglio.

È facile verificare che, per N molto grande, il TV tende a 0, mentre il TC tende al suo valore medio, C_P .

Bibliografia

Markowitz H. (1952), *"Portfolio Selection"*, Journal of Finance, pp. 77-91.

Fuller R. J., Farrell J. L. (1993), *"Analisi degli investimenti finanziari"*, McGraw-Hill.

Graham B., Dodd D. e Cottle S. (1962), *"Security Analysis"*, McGraw-Hill, 4 ed.

Graham, Dodd e Cottle (1962), op cit, pag. 34.

Markowitz H. (1952), *"Portfolio Selection"*, Journal of Finance, 7, 77-91.

Markowitz H. (1959), *"Portfolio Selection: efficient diversification of investments"*, Wiley.