MODELLI PER LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE

L'APPROCCIO *ECONOMICO-STOCASTICO*

di Cosimo Maggio

1. Introduzione: un modello della Struttura per Scadenza in condizioni di certezza

Come abbiamo visto in un precedente lavoro, l'approccio "statistico-parametrico" ha come principale obiettivo quello di migliorare l'adattamento, cioè il *fitting*, ai dati osservati del modello teorico utilizzando polinomi interpolanti. Con l'approccio "economico-stocastico" si cerca invece di ottenere un modello di SpS, costruito su basi economicamente valide e con dinamica di natura stocastica, che in alcuni casi rispetti il principio di non-arbitraggio (nel senso che i prezzi teorici previsti dal modello escludano la possibilità di arbitraggi rischiosi); mentre, in altri casi, si cerca di costruire un modello di equilibrio generale in cui la SpS venga fuori come uno dei risultati del comportamento massimizzante degli attori finanziari, il tutto sotto l'ipotesi di un mondo rischioso e incerto[1].

Il punto di partenza nella costruzione di un modello che ricada in questo secondo approccio è quello riferito alla condizione di "certezza"[2], per poi, nel seguito, estendere i risultati ottenuti al caso di "incertezza"[3]: in condizione di certezza, i tassi di interesse futuri $i(T, s)$ sono noti in t, con $t<T<s$, valendo il *teorema dei prezzi certi*:

$$v(T, s) = v(t, T, s)$$

[1] In questo modo, il premio al rischio presente nei tassi della SPS ha natura endogena ricavabile dal modello e non ipotizzato esogenamente.

[2] Il futuro è conosciuto con probabilità uguale a 1.

[3] Un mondo "incerto" è caratterizzato da *n* scenari conosciuti, note anche le probabilità di accadimento. Al contrario, un mondo "ambiguo" ha scenari conosciuti, ma non si conosce bene la distribuzione delle probabilità.

dove *v* è il fattore di sconto, o prezzo unitario.

Questo implica che i tassi *a pronti* futuri coincidano con i tassi *a termine* correnti.

Sotto questa ipotesi, il valore v(t+dt, T) in t+dt di uno ZCB con scadenza in T risulta conosciuto, tale che

$$dv(t, T) = v(t, T) \cdot r(t)dt$$

dato che $dv(t, T) := [v(t+dt, T) - v(t, T)]$, cioè l'incremento di valore ottenuto possedendo uno ZCB con scadenza *T* da *t* a *t+dt*, dovrà coincidere, per evitare arbitraggi, con l'incremento del valore $v(t, T) \cdot r(t)dt$ ottenuto, inerente allo stesso periodo, liquidando in *t* lo ZCB, e investendo istantaneamente il ricavato sul mercato, definito nel tempo continuo, al *tasso di rendimento istantaneo a breve*, *r(t)*.

Una delle forme funzionali implicite maggiormente utilizzate in letteratura per esprimere la dinamica del tasso *r(t)* è in termini differenziali, che per il caso privo di incertezza, si può esprimere come:

$$dr(t) = f(r_t\,, t)dt$$

con valore iniziale $r(0)=r_0$

Un'interessante esplicitazione della f(r, t), utilizzata da diversi autori (vedi oltre) è costituita dal modello di evoluzione *mean-reverting*, espresso dall'equazione differenziale

$$dr(t) = a(b - r_t)dt$$

con *a* e *b* costanti positive assegnate. È l'ipotesi di dinamica caratterizzata dal "richiamo alla media":

- nel piano (t, r), il "moto" del punto rappresentativo di *r(t)* avviene con velocità $f := a(b - r_t)$;

- *f* ha lo stesso segno di $b - r_t$, ed è proporzionale al suo valore assoluto tramite il coefficiente *a*.

Quindi, il punto rappresentativo del tasso istantaneo tende a muoversi verso la retta r(t)=b con velocità tanto maggiore quanto più è distante dal livello b e, a parità di distanza, tanto maggiore quanto più è elevato il valore di *a*.

L'equazione differenziale ha soluzione, con condizione al contorno $r(0)=r_0$

$$r(t) = b - (b - r_0)e^{-a\,t}$$

Le sue caratteristiche[4] sono:

- il valore *b* è interpretabile come un valor medio;
- l'avvicinamento al valore *b* avviene asintoticamente, con andamento esponenziale;
- il parametro *b* rappresenta il valore di "lungo periodo" di *r(t)*: è il livello di equilibrio del tasso r_t, cioè è il livello a cui il tasso di interesse non si modifica più se non a causa di shock aleatori;
- per l'intensità di rendimento a scadenza "a lungo termine" si fa tendere *t* a infinito, e si ha $r_\infty := \lim r(t)=b$;
- il parametro *a* esprime la *forza di richiamo* verso *b*, ed è interpretabile come la "ripidità" della traiettoria esponenziale: esso misura la forza con cui il tasso di interesse tende a ritornare sul suo livello di equilibrio, dopo che si è verificato uno shock che lo ha allontanato da tale livello; quando *a* è positivo, un aumento di r(t) rispetto al suo valore di equilibrio b comporta che nel lungo periodo il tasso tende a scendere; al contrario quando r va al di sotto del livello b, nel lungo periodo il tasso tende a risalire.

[4] Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005) "*Manuale di finanza. Modelli stocastici e contratti derivati*", il Mulino, pp. 280 e segg.

È da osservare che la dinamica *mean-reverting* formalizza, in condizioni di certezza, l'ipotesi keynesiana di "normal backwardation", secondo la quale $r(t)$ tende al tasso normale di lungo periodo b.

Inoltre, se definiamo $r(t, T)$ come la *yield to maturity*, cioè espressione della struttura per scadenza dei rendimenti in termini di intensità di interesse, allora, possiamo conseguire direttamente la SpS in termini di tasso nel seguente modo

$$i(t, T) = e^{r(t,T)} - 1$$

In conclusione, se la traiettoria di r_t è deterministica, la *yield curve* futura risulta conosciuta in t.

2. Modelli in condizione di incertezza: l'approccio di tipo "economico-stocastico"

Come si osserva ogni giorno sui mercati finanziari, i tassi di interesse sono delle variabili aleatorie. Questa nuova considerazione fa sì che la dinamica del tasso $r(t)$ sia descritta attraverso una "*equazione differenziale stocastica*" del tipo

$$dr(t) = f(r_t\,, t)dt + g(r_t\,, t)dW(t)$$

con la condizione iniziale $r(0)=r_0$, e dove $dW(t)$ è un qualche processo stocastico[5].

Le ipotesi di base adottate in riferimento al mercato teorico, a cui faremo sempre riferimento, sono[6]:

- il mercato è aperto con continuità;

[5] Farò comunque riferimento al processo che meglio si conosce e maggiormente trattato dalla letteratura: il processo di Wiener.

[6] Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005) "Manuale di finanza. Modelli stocastici e contratti derivati", il Mulino, pag. 288.

- il mercato è perfetto, cioè sono assenti i costi di transazione e fiscali, i titoli sono infinitamente divisibili, sono consentite le vendite allo scoperto, gli agenti sono massimizzatori di profitto e *price-taker*;
- sono esclusi arbitraggi non rischiosi;
- l'intensità istantanea di interesse dei titoli con vita a scadenza infinitesima, lo "spot rate" *r(t)*, è un processo di diffusione, descritto dall'equazione differenziale stocastica, su scritta, dove il coefficiente *f* è detto *drift* ("deriva", cioè un valore asintotico di lungo periodo a cui *r* tende), e il coefficiente *g* è detto di *diffusione* (incorpora il fattore "rischio": può essere anche un vettore di coefficienti, e in questo caso esso è rappresentativo di più rischi);
- *f* e *g* incorporano la media, come deriva asintotica, la volatilità e il premio per il rischio, tre fattori (funzioni endogene al modello) le cui assunzioni diverse caratterizzano diversi modelli.

I diversi modelli che si sono succeduti in economia hanno cercato di dare una forma funzionale particolare ai termini *f* e *g* in modo che la curva dei tassi che risolve questa equazione differenziale fosse la più aderente possibile alla curva dei tassi effettivamente osservata sui mercati finanziari. In particolare, si vorrebbe avere una serie di parametri tali da permettere di aggiustare la curva teorica per qualsiasi variazione della curva empirica.

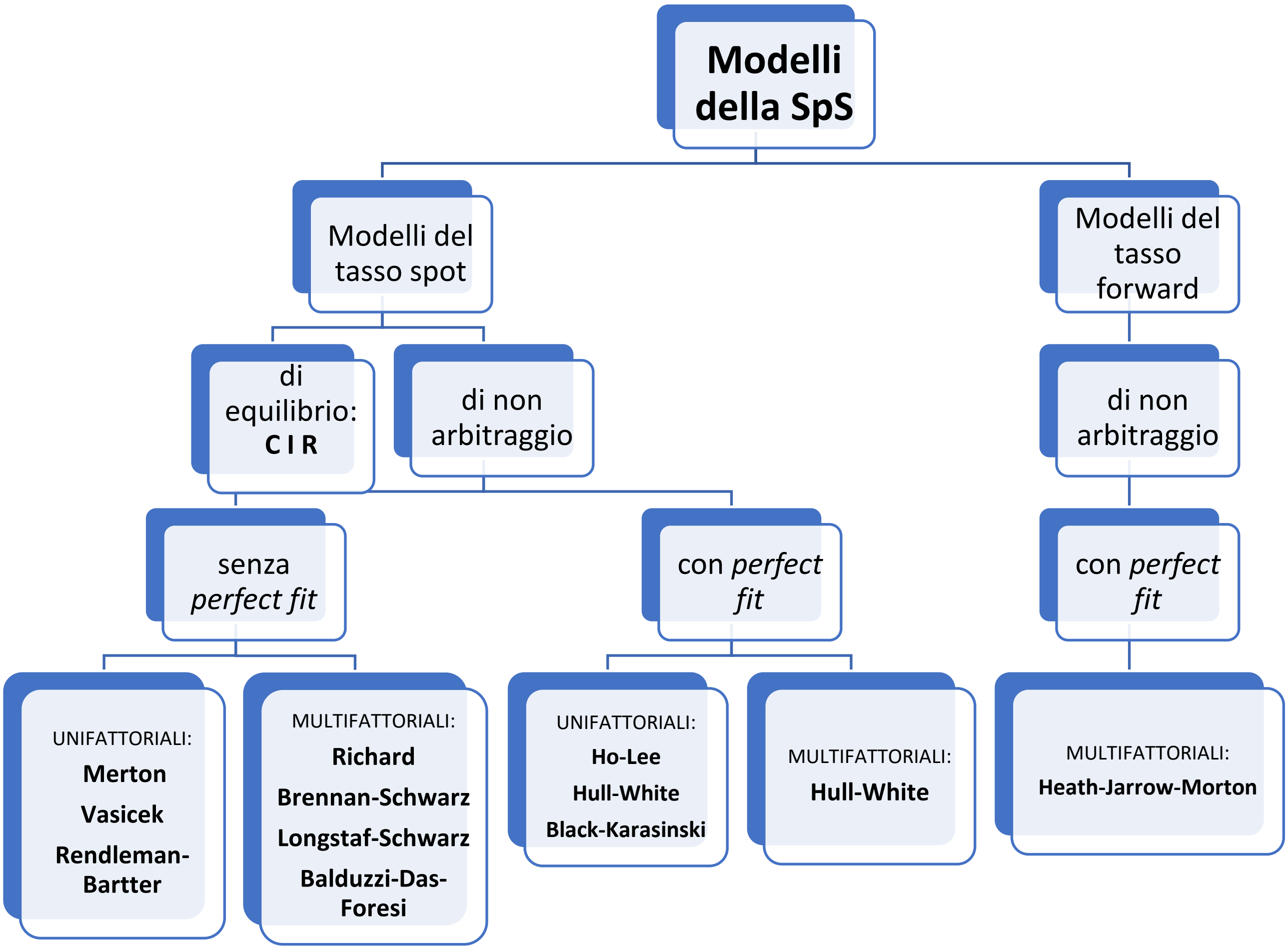
3. Una possibile classificazione

La letteratura finanziaria, a partire da Merton (1970)[7], ha sviluppato varie ipotesi relativamente a come le assunzioni sul valor medio, sulla volatilità e sul premio per il rischio si potevano esplicitare (ovvero, nella letteratura si trovano varie forme di *f* e *g*); in questo modo, è possibile storicamente avere due gruppi di modello: al primo gruppo appartengono i modelli univariati sviluppati fino alla

[7] Merton R. C. (1970) "*A dynamic general equilibrium model of the asset market and its application to the pricing of capital structure of the firm*", Working Paper 497-70, MIT, , ora riprodotto in Merton R. C. (1990) "*Continuous- Time Finance*", Basil Blackwell, Oxford and Cambridge.

metà degli anni 80; al secondo gruppo, sviluppato successivamente a partire da Ho-Lee (1986)[8], si impone un perfetto adattamento alla SPS corrente, in modo da rendere esattamente compatibili i prezzi osservati con l'ipotesi di non arbitraggio.

Una possibile classificazione, del tutto parziale e arbitraria, della modellistica può essere così rappresentata[9]:



[8] Ho, T.S.Y., Lee, S. B. (1986) "*Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims*", The Journal of Finance 41, 1011-1029.

[9] Cesari R. (2009), "*Introduzione alla finanza matematica. Derivati, prezzi e coperture*", Springer, pag. 63.

4. Modelli Unifattoriali per il tasso spot

L'ipotesi che sta alla base di questi modelli è che i prezzi degli ZCB dipendano da un unico fattore di rischio, rappresentato dal tasso *spot*, *r(t)*: la dinamica del tasso *r* definisce l'intera SpS: "*Since the short rate represents at each instant the initial point of the yield curve, one-factor short-rate models assume the evolution of the whole yield curve to be completely determined by the evolution of its initial point*"[10].

Le proprietà[11] e i limiti che caratterizzano questo primo gruppo di modelli sono quindi:

- il tasso istantaneo a breve è la sola variabile di stato: è il solo fattore di rischio;
- i tassi della SpS (che è una funzione lineare di r) sono tra loro perfettamente correlati;
- la SpS ricavata dal modello può non *fittare* bene la nuvola di dati osservabile sul mercato: la conseguenza è che i modelli sono inadeguati a rappresentare la SpS reale, ovvero i prezzi calcolati sono soggetti ad arbitraggi rischiosi; in particolare, la perfetta correlazione tra le variazioni dei tassi riferiti alle diverse scadenze porta a sovrastimarne gli spread tra i tassi calcolati, con l'inevitabile errore di "..*sopravalutazione dei derivati di tasso"*[12].

Casi di alcune forme funzionali per *f* e *g,* in riferimento ai modelli a un solo fattore, sono riassunti in Chan, Karoyli, Longstaff e Sanders (1992)[13], che esaminano processi per r(t) del tipo:

$$dr(t) = [a + b \cdot r(t)]dt + c \cdot r(t)^d \cdot dW(t)$$

[10] Brigo D., Mercurio F. (2006), "*Interest Rate Models –Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*", Springer, pag. XIX preface.
[11] Cesari R. (2009), "Introduzione alla finanza matematica. Derivati, prezzi e coperture", Springer, pag. 73.
[12] Cesari R. (2009), "Introduzione alla finanza matematica. Derivati, prezzi e coperture", Springer, pag. 74.
[13] Chan K. C., Karloyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. B. (1992) "*An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short–Term Rate*", Journal of Finance, 47, pp. 1209–1227.

dove *a* e *b* sono parametri che compongono la parte attesa della dinamica, $cr(t)^d$ è la volatilità del processo e *d* rappresenta la sensibilità della volatilità rispetto al livello corrente del tasso d'interesse.

Nel prospetto che segue[14] sono presentate alcune delle diverse dinamiche, che mostrerò in maggior dettaglio nel paragrafo seguente, per il tasso a breve, derivanti dai pertinenti vincoli su *drift* e *diffusione*.

Modello	**Dinamica**	**a**	**b**	**d**
Merton (1970)	$dr(t) = adt + cdW(t)$		0	0
Vasicek (1977)	$dr(t) = [a + br(t)]dt + cdW(t)$			0
CIR (1985)	$dr(t) = [a + br(t)]dt + cr(t)^{1/2}dW(t)$			1/2

Generalizzando, gli autori forniscono anche una versione più completa:

$$dr(t) = a_t[b_t - r(t)]dt + [c_t + d_t \cdot r(t)]^f \cdot dW(t)$$

4.1. Modelli Unifattoriali senza perfetto adattamento

Il modello di Merton (1970)[15]

Merton (1970) propone che la dinamica del tasso a breve sia descritta dall'*equazione differenziale stocastica* del tipo

$$dr_t = \mu_r dt + \sigma_r dW_t$$

[14] Basile C., Leonci A. (), "*Modelli Stocastici Della Struttura Per Scadenza: I Modelli Di Vasicek (1977) E Longstaff–Schwartz (1992)*", Lavoro di seminario in Finanza alla Facoltà di Scienze economiche dell'Università della Svizzera Italiana di Lugano, pag. 53.

[15] Merton R. C. (1970) "*A dynamic general equilibrium model of the asset market and its application to the pricing of capital structure of the firm*", Working Paper 497-70, MIT, ora riprodotto in Merton R. C. (1990) "*Continuous- Time Finance*", Basil Blackwell, Oxford and Cambridge.

con l'ipotesi iniziale $r(t_0) = r_0$, dove μ_r e σ_r sono costanti. La soluzione di questo tipo di equazione è immediata, e si ottiene integrando entrambi i membri tra t_0 e una qualsiasi altra data t, ottenendo

$$r(t) = r(t_0) + \mu_r(t - t_0) + \sigma_r [W(t) - W(t_0)]$$

Il tasso si distribuisce normalmente, i cui momenti sono

$$E[r(t)] = r(t_0) + \mu_r(t - t_0)$$
$$Var[r(t)] = \sigma_r^2(t - t_0)$$

ovvero il tasso di interesse a pronti (istantaneo) tende a crescere nel tempo aggiungendo μ_r a ogni istante successivo.

Dalla soluzione ottenuta, applicando la condizione di non-arbitraggio, si possono calcolare[16] i prezzi degli ZCB e la struttura per scadenza dei tassi a pronti e a termine, esprimibili tutti nelle seguenti forme

$$P(t, T) = exp[-r(t)(T-t) - (1/2)(a - \lambda\sigma)(T-t)^2 + (1/6)\sigma^2(T-t)^3]$$
$$i(t, T) = r(t)(T-t) + (1/2)(a - \lambda\sigma)(T-t) - (1/6)\sigma^2(T-t)^2$$
$$i(t, T; s) = r(t)(s-T) + (a - \lambda\sigma)(s-T) + (1/2)\sigma^2(s-T)^2$$

Il limite maggiore del modello è che i tassi stimati possono essere negativi, e questo contradice il fatto che sul mercato i tassi (almeno quelli nominali) sono sempre positivi; inoltre, un secondo problema è che i tassi stimati, in media, sono sempre o crescenti o decrescenti[17].

---

[16] La soluzione può avvenire o per via "teorema di Feynman-Kac" o per via "sostituzione affine": sono due procedure alternative applicabili a questo tipo di problemi (Equazioni Differenziali Stocastiche), la cui scelta dipende dalla convenienza analitica e dalla facilità di calcolo.

[17] Menoncin F. (2006), "*Mercati finanziari e gestione del rischio*", isedi, pag.216.

Il modello di Vasicek (1977)[18]

Vasicek (1977) presenta un modello che considera un superamento di quello di Merton (1970). In particolare, il suo obiettivo è quello di risolvere il limite che i tassi istantanei stimati abbiano un andamento monotono o sempre crescente o sempre decrescente.

L'equazione differenziale che descrive la dinamica del tasso a breve è

$$dr(t) = a_r[b_r - r(t)]dt + \sigma_r \cdot dW(t)$$

dove a, b e σ sono costanti positive, e $r(t_0)=r_0$ è la condizione iniziale.

La dinamica del tasso istantaneo è di tipo *mean-reverting*, con a che rappresenta la velocità di aggiustamento, b è il livello medio di lungo periodo; presenta diverse forme possibili: crescente, decrescente e a gobba; ma come nel caso di Merton, soffre ancora della possibilità di stimare tassi negativi.

Applicando la condizione di non arbitraggio abbiamo:

$$P(t, T) = exp[-r(t)A(T-t) + B(T-t)]$$

dove

$A(T-t) = [1 - exp(-a(T-t))]/a,$ mentre $B(T-t) = - \sigma_r^2/4a\ A^2(T-t) + r_\infty[A(T-t) - (T-t)]$ e r_∞ è il tasso perpetuo (o a scadenza infinita).

L'intera Struttura per Scadenza può essere così determinata

$$i(t, T) = r(t)A(T-t)/(T-t) + B(T-t)/(T-t)$$

Il modello di Rendleman-Bartter (1980)[19]

Nel modello di Rendleman-Bartter (1980) il processo per la determinazione del tasso $r(t)$ è

---

[18] Vasicek, O. (1977) "*An Equilibrium Characterization of the Term Structure*", Journal of Financial Economics 5, 177-188.

[19] Rendleman, R.J., Bartter, B.J. (1980) "*The Pricing of Options on Debt Securities*", Journal of Financial and Quantitative Analysis 15, 11-24.

$$dr(t) = a \cdot r(t) + b \cdot r(t) dW_t$$

dove a e b sono costanti: questo significa che $r(t)$ segue un moto geometrico browniano.

L'assunzione di Rendleman-Bartter (1980) è che il tasso di interesse a breve si evolve nel tempo come il prezzo di una azione, non incorporando l'ipotesi di *mean reverting*.

4.2. Modelli Unifattoriali con perfetto adattamento

Per superare i limiti dei primi modelli unifattoriali, invece di ampliare il numero delle variabili espressioni di rischio, vi sono stati alcuni autori che hanno cercato di risolvere il problema della scarsa aderenza dei valori calcolati rispetto ai dati di mercato ponendo i parametri direttamente dipendenti dal tempo. Infatti, anche scegliendo accortamente i parametri dei primi modelli si poteva fare in modo che essi replicassero "all'incirca" molte delle SpS che si incontrano nella realtà, ma la somiglianza non era precisa, e in alcuni casi si verificavano errori significativi.

In generale, i modelli del primo filone presentano un *drift* del tasso a breve non dipendente dal tempo, mentre, in questo nuovo approccio, conosciuto anche come approccio "ad arbitraggi nulli"[20], il *drift* è fatto dipendere dalla variabile t. Da un lato, in questo modo, i modelli hanno perso la proprietà di "stazionarietà" dei processi; ma, dall'altro, hanno consentito una sufficiente flessibilità necessaria per poter permettere al modello un buon adattamento alla reale SpS, rendendo compatibili (*perfect fit*) i prezzi osservati con quelli di non-arbitraggio teorici. Insomma, la SpS corrente diventa un "input" del modello teorico.

[20] Cerca: Hull J. C. (2000), "*Opzioni, Futures e altri derivati*", Prentice-Hall international (edizione italiana), pag.571.

Il modello di Ho-Lee (1986)[21], o "extended Merton"

Ho e Lee hanno svolto un'estensione del modello di Merton (1970), mantenendo l'assunto del tasso istantaneo come variabile di stato, ma proponendo il *drift* non più costante ma funzione del tempo, in modo da guadagnare tutti i gradi di libertà necessari per l'adattamento del modello ai prezzi di mercato correnti.

Nella loro versione originaria, questi due autori mostrano il loro modello in forma di un albero binomiale per i prezzi delle obbligazioni, con due parametri: la deviazione standard del tasso a breve e il prezzo di mercato del rischio del tasso a breve. Nella versione continua, il modello è presentabile come

$$dr = f(t)dt + \sigma dW$$

dove σ, la deviazione standard istantanea del tasso a breve, è costante; mentre *f(t)* è una funzione del tempo, esplicitata in modo da garantire che il modello sia coerente con la Struttura per Scadenza iniziale. La *f(t)* definisce la variazione attesa di r(t) al tempo *t*: essa non dipende dal livello *r*. insomma, è interessante notare che il prezzo di mercato del rischio risulta irrilevante ai fini della valutazione dei derivati su tassi di interesse.

La *f(t)* è calcolabile analiticamente dalla seguente relazione

$$f(t) = f_t(0, t) + \sigma^2 t$$

dove f_t è il tasso forward istantaneo osservato al tempo *0* per la scadenza *t* (l'indice *t* sta ad indicare la derivata parziale rispetto al tempo *t*).

L'espressione per il prezzo di uno ZCB in funzione del tasso a breve è

$$P(t, T) = A(t, T)exp[-r(t, T)(T-t)]$$

dove

---

[21] Ho T.S.Y., Lee, S. B. (1986) "*Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims*". The Journal of Finance 41, 1011-1029.

$$ln[A(t, T)] = ln[\frac{P(0,T)}{P(0,t)}] - (T-t)\ \frac{\partial ln[P(0,t)]}{\partial t} - 0.5\sigma^2 t(T-t)^2$$

Il modello di Hull-White (1990)[22], o "extended Vasicek"

In una pubblicazione del 1990, Hull e White hanno esaminato diverse possibili varianti del modello di Vasicek che assicurerebbero la coerenza (*perfect fit*) con le SPS corrente. Tra queste differenti versioni prendono poi in esame la seguente dinamica

$$dr = [f(t) - ar]dt + \sigma dW$$

ovvero

$$dr = a[f(t)/a - r]dt + \sigma dW$$

dove a e σ sono costanti.

Il modello di Hull e White è pari al modello di Hu e Lee completato da una *mean-reverting*, con tasso pari ad a; ovvero, allo stesso modo, è un modello di Vasicek con un livello tendenziale che dipende dal tempo: al tempo t, il tasso a breve tende a ritornare verso $f(t)/a$ con una velocità pari ad a. In questo modo, il modello di Ho e Lee rappresenta un caso particolare del modello di Hull e White, con $a = 0$.

Una possibile esplicitazione della $f(t)$ è

$$f(t) = f_t(0,t) + af(0,t) + \sigma^2/2a\ [1 - exp(-2at)]$$

[22] Hull, J. C., White, A. (1990) "*Pricing Interest Rate Derivative Securities*". The Review of Financial Studies 3, 573-592.

Il modello di Black-Karasinski (1991)[23], o "lognormal extended Vasicek"

Black e Karasinski hanno proposto un modello di tipo *extended Vasicek* di tipo lognormale, nel senso che essi analizzano non tanto la dinamica di *r(t)*, quanto la dinamica del suo logaritmo:

$$dln(r) = [a(t) - k(t)ln(r)]dt\ \sigma dW$$

In questo modo il processo del tasso *r* è certamente positivo, superando uno dei limiti dei modelli precedenti che, ipotizzando la normalità della distribuzione condizionata dei tassi, garantivano che la probabilità dei tassi negativi fosse non nulla.

4.3. Modelli di equilibrio

I modelli di equilibrio appartengono al filone dei "modelli del tasso *spot*". Essi prendono spunto da tutta una serie di assunzioni riferite alle variabili economiche sotto la condizione di equilibrio dei mercati finanziari, per poi ricavare il processo seguito dal tasso di interesse a breve *r(t)*. Essi, poi, analizzano le implicazioni del modello per i prezzi delle obbligazioni, delle opzioni e degli altri derivati in modo tale che tali attività finanziarie si configurano come dipendenti solo dal processo seguito da *r(t)* in un mondo neutrale verso il rischio.

Qui di seguito presenteremo solo il modello CIR (1985), tra le altre cose il più interessante di quelli appartenenti a questa gamma.

Il modello di Cox-Ingersoll-Ross (1985)[24]

Come visto sopra, nel modello di Vasicek il tasso di interesse a breve può risultare negativo. Cox, Ingersoll e Ross hanno proposto un modello in cui i tassi

[23] Black, F., Karasinski, P. (1991) "*Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal*". Financial Analysts Journal 47, 52-59.

[24] Cox J.C., Ingersoll J.E., and Ross S.A. (1985) "*A Theory of the Term Structure of Interest Rates*", Econometrica 53, 385-407.

sono sempre non negativi. Nel loro modello il processo neutrale verso il rischio per *r(t)* è

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

Questo processo è del tipo *mean-reverting*, dello stesso tipo di Vasicek, con la differenza che il termine stocastico ha una deviazione standard proporzionale a $\sqrt{t}$: ciò vuol dire che al crescere del tasso di interesse a breve, la sua deviazione standard aumenta.

I tre autori dimostrano che nel loro modello i prezzi obbligazionari hanno la stessa forma generale del modello di Vasicek

$$P(t, T) = A(t, T)exp[-B(t, T)]$$

dove

$$B(t, T) = \frac{2e^{c(T-t)}-1}{(c+a)[e^{c(T-t)}-1]+2c}$$

e

$$A(t, T) = \{\frac{2ce^{(a+c)(T-t)/2}}{(c+a)[e^{c(T-t)}-1]+2c}\}^{2ab/a\hat{}2}$$

dove $c = \sqrt{(a^2 + 2\sigma^2)}$.

Come nel modello di Vasicek, le *yield curves* possono essere inclinate verso l'alto o verso il basso, o mostrare una lieve gobba. Inoltre, il tasso a lungo termine dipende dal *r(t)* in modo lineare, e ciò vuol dire che il valore di *r* determina il livello della Struttura per Scadenza al tempo *t*, mentre la sua forma è indipendente da *r,* ma dipende ancora da *t*.

5. Modelli Multifattoriali per il tasso spot

I modelli multifattoriali hanno più ricche strutture di correlazione e maggiore capacità di adattamento alla nuvola dei dati osservati sul mercato rispetto a quelli unifattoriali: essi rappresentano una possibile risposta ai limiti dei modelli unifattoriali, anche se propongono strutture complesse e di difficile implementazione. La loro peculiarità principale è che i prezzi degli ZCB dipendono da più fattori di rischio.

Un modello del tasso reale e del tasso di inflazione [Richard (1978)][25]

In questo modello, l'economia è rappresentata dall'evoluzione di tre variabili di stato: il tasso reale *r(t)*, il livello dei prezzi al consumo *p* e il tasso atteso di inflazione *y*, secondo le seguenti equazioni differenziali stocastiche

$$dr = a_r(b_r - r)dt + \sigma_r \sqrt{r}\, dW_r$$

$$dp = pydt + \sigma_p \sqrt{y}\, dW_p$$

$$dy = a_y(b_y - r)dt + \sigma_y \sqrt{y}\, dW_y$$

Inoltre, per semplicità si assume che non ci sia correlazione tra shock reali e shock monetari.

Viene costruito così un modello in cui la curva nominale risulta la somma della SpS reale e della SpS inflazionistica, mentre il tasso nominale istantaneo è la somma del tasso reale istantaneo più il tasso atteso di inflazione, aggiustato per la convessità.

[25] Richard S. F. (1998) "*An arbitrage model of the term structure of interest rates*", Journal of financial economics, 6, 33-57.

Un modello del tasso a breve e del tasso a lungo termine [Brennan-Schwartz (1979)][26]

In questo modello, l'economia è rappresentata dall'evoluzione di due variabili di stato: il tasso a breve $r(t)$ e il tasso a lunghissimo termine r_∞, definito come il tasso di rendimento su titoli "irredimibili" di prezzo P_∞ e cedola c

$$dr(t) = [a_r + b_r(r(t) - r_\infty)]dt + \sigma_r \cdot r\, dW(t)$$
$$dr(\infty) = r_\infty[b_\infty + fr(t) + gr_\infty]dt + \sigma_r \cdot r_\infty\, dW(t)$$

dove $r(\infty)$ è il tasso della perpetuità.

Un modello del tasso a breve e della varianza [Longstaff-Schwartz (1992)][27]

Il modello è rappresentato da due variabili di stato con equazioni differenziali stocastiche non correlate, del tipo

$$dX(t) = [a - bX(t)]dt + c \cdot \sqrt{X} dW(t)$$
$$dY(t) = [f - gY(t)]dt + h \cdot \sqrt{Y} dW(t)$$

Seguendo lo sviluppo di CIR (1985), Longstaff e Schwartz (1992) mostrano che il tasso a breve e la sua varianza possono essere calcolate nel seguente modo

$$r(t) = (\alpha/c^2)X(t) + (\beta/g^2)Y(t)$$
$$var(t) = (\alpha^2/c^2)X(t) + (\beta^2/g^2)Y(t)$$

Quindi, hanno espresso i processi di r(t) e var(t) in funzione dei risultati sopra ottenuti.

---

[26] Brennan M. J., and Schwartz E. (1979). "*A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds*". Journal of Banking and Finance 3 , 133-155.

[27] Longstaff F.A., Schwartz E.S. (1992a) "*Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model".* The Journal of Finance 47, 1259-1282.

Un modello del tasso a spot e della sua tendenza con perfetto adattamento [Hull-White (1994)][28]

Hull e White (1994) hanno adattato i meccanismi di perfetto adattamento al caso multifattoriale. Il loro modello è definito dal seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche

$$dr(t) = [a_r + x_r - kr(t)]dt + \sigma_r \, dW_r(t)$$
$$dx(t) = -\, b_x x(t)dt + \sigma_x \, dW_x(t)$$
$$dW_r dW_x = \rho dt$$

dove $x(t)$ è una componente stocastica con *mean-reversion* verso *0*.

Gli stessi autori osservano che il loro modello non è altro che la versione a perfetto adattamento del modello di Brennan-Schwartz (1979) in cui il tasso a breve tende al tasso a lungo termine, che a sua volta converge verso il livello asintotico di lunghissimo periodo.

Un modello del tasso a breve e del tasso tendenziale [Balduzzi-Das-Foresi (1998)][29]

Qui abbiamo un'economia che è rappresentata dall'evoluzione di due variabili di stato, di cui la seconda è il tasso tendenziale, anch'esso stocastico

$$dr(t) = a_r[b_t - r(t)]dt + \sqrt{\sigma + r} \cdot dW_r(t)$$
$$db(t) = [a_b + cb]dt + \sqrt{f + b} \cdot dW_b(t)$$

dove b(t) è il tasso tendenziale di lungo periodo, anch'esso esprimibile attraverso una dinamica simile a quella del tasso a breve.

---

[28] Hull J., White A. (1994c) "*Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models*". The Journal of Derivatives 2, 37-47.

[29] Balduzzi P., Das S.R., Foresi S., (1998) "*The central tendency: a second factor in bond yields*", Reviewof economics and statistics, 80, 62-72.

6. Modelli per il tasso forward: il modello di Heath-Jarrow-Morton (1992)[30]

Il modello di Heath-Jarrow-Morton (1992) ha la caratteristica di essere un modello di non-arbitraggio il cui adattamento alla SpS corrente è perfetto, con una peculiarità che lo distingue dall'approccio utilizzato in quel periodo: essi partono dai tassi *forward* e non dai tassi *spot*. Ciò è possibile grazie alla stretta relazione che c'è tra i due tassi.

Nel caso unidimensionale, essi hanno utilizzato la seguente equazione

$$dr_{forward}(s,T) = \mu(s, T)ds + \sigma(s, T)dW$$

dove i parametri μ e σ sono riferiti al tasso *forward*.

Per il caso multidimensionale, la hanno proposto la seguente forma

$$dr_{forward}(s,T) = \boldsymbol{\sigma}'(s, T)\boldsymbol{\sigma}_{ZCB}(s, T)ds + \boldsymbol{\sigma}'(s, T)d\mathbf{W}$$

dove i fattori in neretto sono fattori multidimensionali.

7. Sviluppi recenti nella modellistica sui tassi d'interesse (cenni)

I modelli per i tassi di interesse, dagli anni 70 ad oggi, si sono evoluti sviluppandosi fino a spingersi verso esiti rilevanti sia in termini di generalità e sia in termini di significato. Lo stato attuale della frontiera accademica, tuttavia, non può dirsi comunque appagante, almeno sotto due punti di vista.

Da un lato, l'analisi dei *drivers* che spingono i tassi, e il loro significato economico, non è ancora comparabile al livello a cui la formalizzazione si è spinta, alla ricchezza di strumenti matematici necessari per la costruzione dei

[30] Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. (1992) "*Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology*". Econometrica 60, 77-105.

modelli: molta ricerca, sia teorica che empirica, deve essere ancora fatta sulle variabili che determinano i tassi e gli spread tra tassi nei mercati globalizzati. Dall'altro, i modelli esaminati sopra hanno una caratteristica comune: sono tutti basati su prezzi e tassi in funzione del tempo e della data di scadenza. Solo in pochissimi casi, anche se ormai in misura sempre più frequente, si è tentato di analizzare i titoli per la durata.

Un rilevante passo avanti è stato, comunque, l'utilizzo dei processi stocastici generalizzati (in questo lavoro non trattati), che permettono di configurare una varietà infinita di strutture di correlazione tra i tassi con scadenze diverse, pervenendo, al limite, a un perfetto adattamento non solo alle osservazioni, ma anche a tutti i momenti secondi della distribuzione temporale e per durata dei tassi stessi. È in questa direzione che si sta cercando di portare a conclusione l'intero filone di ricerca, che ha richiesto oltre 40 anni di studi: dai primi modelli univariati (vedi Vasicek e Merton), che necessitavano di una perfetta correlazione tra i tassi di interesse con scadenze diverse, in quanto tutti indirizzati dall'unica variabile di stato r(t), ai modelli multivariati, che hanno permesso una maggiore flessibilità (ricordo l'approccio di HJM che ha introdotto il perfetto adattamento alla curva dei tassi corrente), fino ai nuovi metodi matematico-statistici, che dovrebbero permettere ai modelli dei tassi di cogliere anche le dinamiche della volatilità e delle superficie di correlazioni tra tutte le molteplici scadenze.

Insomma, è ragionevole pensare che sia questo l'approccio che produrrà nei prossimi anni esiti stimolanti, alla ricerca di una teoria esaustiva della Struttura per Scadenza dei tassi d'interesse.