MODELLI PER LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE L'APPROCCIO *STATISTICO-PARAMETRICO*

di Cosimo Maggio

1. Introduzione: una possibile classificazione

C'è subito da dire che i tassi di interesse non sono direttamente trattati sui mercati finanziari. Tuttavia, essi si possono ricavare dalle quotazioni dei titoli: si tratta di "estrarre" dalle quotazioni disponibili sul mercato obbligazionario i tassi che modellano la SpS. Per questo, si dice che la SpS è implicita nei prezzi dei titoli quotati.

Gli approcci metodologici che riguardano la teorizzazione della SpS possono essere classificati (uno dei tanti modi per classificarli) in due gruppi[1]: il primo lo possiamo definire di tipo *statistico-parametrico,* nel senso che esso cerca di "*sviluppare un modello parsimonioso in termini di ipotesi e parametri, capace di ricavare i tassi della SPS impliciti nei prezzi di mercato interpolando al meglio i dati osservabili e producendo una curva sufficientemente liscia (smooth) al variare delle scadenze*"[2]; il secondo lo possiamo chiamare *economico-stocastico*, nel senso che in questa categoria di modelli si cerca da un lato di rispettare il principio di "non-arbitraggio", mentre da un altro lato si cerca di costruire un modello "*di equilibrio generale in cui la SPS è uno dei risultati del comportamento massimizzante degli operatori e delle condizioni di equilibrio sui mercati dei prodotti reali e dei titoli finanziari*"[3]. Nel primo caso, si cerca di migliorare l'adattamento (*fitting*) ai dati osservati attraverso curve interpolanti (metodo che genera curve che passano *per* i punti) stimandone con la regressione (metodo che genera curve che passano *tra* i punti) i parametri, secondo un processo di tipo deterministico; nel secondo caso, si cerca di

[1] Cesari R., Susini E. (2005), "*Introduzione alla finanza matematica. Concetti di base, tassi e obbligazioni*", McGraw-Hill, pag. 136.
[2] Cesari R., Susini E. (2005), op cit, pag. 139.
[3] Cesari R., Susini E. (2005), op cit, pag. 143.

anticipare il comportamento della variabile "tasso", ipotizzando che esso si evolva seguendo un processo di tipo stocastico.

2. Modelli di tipo "statistico-parametrico"

Tale tipologia di modelli è basata su un approccio di tipo descrittivo che consente di individuare una struttura per scadenza, la SpS, univoca, dati *n* titoli, in funzione del tempo, in modo che risulti minimo lo scarto quadratico tra i prezzi di mercato osservati ad una determinata scadenza e i prezzi teorici stimati dal modello considerato.

Elenchiamo qui di seguito le caratteristiche rilevanti di questo approccio[4].

- *Descrittivo e deterministico*, in quanto suggerisce di assicurarsi la rappresentazione più corretta della SpS, in un certo istante temporale, a prescindere da qualsiasi ipotesi sulla condotta aleatoria dei tassi di interesse.
- Di *disequilibrio*, in quanto non si pone altro obiettivo che quello di rappresentare un mercato obbligazionario in modo "auto-consistente", ma prescindendo dall'inserimento di quest'ultimo in un quadro più ampio in cui attività finanziarie e, soprattutto, tassi di interesse siano legati ad altre variabili finanziarie.
- Inquadrato nella sola tipologia delle *obbligazioni a tasso fisso,* e pertanto inadeguato per altri tipi di obbligazioni o per opzioni sui tassi di interesse.
- Non c'è alcun riferimento a fattori esterni al mercato stesso, né tanto meno all'economia in generale, cioè le sole indicazioni essenziali per la stima sono i flussi dei titoli e il loro prezzo.
- La struttura per scadenza dei tassi è descritta attraverso un funzionale di tipo *polinomiale*: l'obiettivo è quello di determinare il vettore dei parametri del polinomio in modo tale da minimizzare la differenza tra il prezzo teorico dei titoli e quello osservato.

[4] Mennella F., Peviani L. (1997), "*Tassi di interesse. Fondamenti e approcci operativi*", Il Sole 24Ore Libri, pag 62.

- I modelli appartenenti a questo approccio hanno natura *statica*, nel senso che descrivono la sola SpS per diversi valori dati alla scadenza t, e non la sua evoluzione nel tempo: non sono modelli dinamici.

Qui di seguito presentiamo, in maniera schematica, tre modelli che descrivono il comportamento della SpS, classificabili in questo primo approccio, e che vengono ritenuti tra i più interessanti nel panorama accademico.

Il modello di McCulloch (1971, 1975)[5][6]

Il modello di McCulloch si basa sulla stima del fattore di sconto, $v(t)$, da cui si può ricavare la SpS.

Supponiamo di avere *n* titoli dei quali conosciamo i rispettivi prezzi, P_i, per i = 1, 2, …, n; inoltre, assumiamo che il fattore di sconto sia esprimibile come combinazione lineare di *k* funzioni, $g_j(t)$, tale da avere

$$v(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} b_j g(t)_j$$

dove le $g_j(t)$ sono funzioni continue e differenziabili, tali che $g_j(0) = 0$, le b_j sono i corrispondenti coefficienti, per j = 1, ...k, con la condizione iniziale $b_0 = 1$, in modo tale che sia v(0) = 1.

McCulloch (1971) suggerisce di scegliere le funzioni g_j in modo da porre $g_j(t) = t^j$ per j = 1, 2, …, k, ottenendo in questo modo che le funzioni approssimanti risultino dei polinomi di grado k; inoltre, propone di utilizzare una funzione polinomiale cubica in t, descritta dal vettore di parametri $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, del tipo

$$v(t, \mathbf{b}, k=3) = 1 - b_1 \cdot t - b_2 \cdot t^2 - b_3 \cdot t^3$$

[5] McCulloch J. H. (1971), "*Measuring the term structure of interest rate*", Journal of Business 44, 19-31.
[6] McCulloch J. H. (1975), "*The tax-adjusted yield curve*", Journal of Finance, 30, 811-830.

In questo modo, il prezzo teorico, o stimato, del titolo i-esimo, P_i^{stima} (titolo che si può ipotizzare munito di r flussi, CF_h , come per esempio, le cedole e il valore nominale), con h=1, 2, …, r, sarà

$$P_j^{stima} = \sum_{h=1}^{r} CF_{h,j}\, v(t, \boldsymbol{b}, k)_j$$

L'obiettivo è quello di stimare i k parametri b_j, in modo tale da rendere minima la differenza quadratica tra il prezzo effettivo e quello stimato, ponderata con pesi w_i, cioè

$$\min_b \sum_{i=1}^{n} [P_i - P_i^{stima}]^2 w_i$$

Il modello di Nelson-Siegel (1987)[7]

Nelson e Siegel, a differenza di McCulloch, non partono dalla funzione di sconto, ma assumono che la SPS forward a tempo continuo, ovvero il tasso a termine istantaneo, $i_{(0;\ t,\ t)}$, sia rappresentabile in modo, come loro stessi definiscono, "parsimonioso" attraverso una funzione con 4 parametri, $\boldsymbol{b}$ = (b_0, b_1, b_2, k), che poi sono i parametri da stimare, del tipo

$$i_{(0;\ t,\ t)} = b_0 + b_1\, e^{-\frac{t}{k}} + b_2\, \frac{t}{k} e^{-\frac{t}{k}}$$

questo funzionale è un polinomio moltiplicato per una esponenziale negativa: esso è la somma di tre addendi che possono interpretarsi rispettivamente come una componente di lunghissimo termine, b_0, una componente di breve termine, $b_1\, e^{-\frac{t}{k}}$, e una componente di medio termine, $b_2\, \frac{t}{k} e^{-\frac{t}{k}}$.

La forma funzionale dei tassi a pronti, la SpS, può essere ricavata nel seguente modo

[7] Nelson C. R., Siegel A. F. (1987), "*Parsimonious modeling of yield curves*", Journal of Business, 60, 473-489.

$$i_{(0,\,t)} = \frac{1}{t}\int_0^t i(0;\, s, s)ds = b_0 + (b_1 + b_2)\,\frac{1 - e^{-\frac{t}{k}}}{t/_k} - b_2\, e^{-\frac{t}{k}}$$

per cui il tasso spot istantaneo risulta

$$i_{(t)} = b_0 + b_1$$

mentre il tasso a lunghissimo termine è

$$i_{(\infty)} = b_0$$

Una delle forme maggiormente considerate è quella che prevede un k = 1, che diventa

$$i_{(0,\,t)} = b_0 + b_1\,\frac{1 - e^{-t}}{t} + b_2\,\left(\frac{1 - e^{-t}}{t} - e^{-t}\right) =$$
$$= \textit{long} + \textit{short} + \textit{medium}$$

Una caratteristica di questo caso è che, a seconda del valore dei parametri, è in grado di generare le forme più comuni per la curva dei tassi a pronti: sempre ascendente, sempre discendente (*inverted*), piatta (*flat*) e a forma di conca (*humped*) , ma per altre forme più realistiche (come ad S o a cucchiaio) rimane alquanto rigida[8].

La SPS nel modello Nelson-Siegel viene così composta da tre elementi: la costante di lungo periodo, un fattore monotono tendente a zero, la componente a breve, e un fattore a gobba, nullo ai due estremi, che è la componente di medio termine[9].

La stima dei parametri si ricava come nel modello di McCulloch. Infatti, il prezzo dello ZCB è

---

[8] Menoncin F. (2006), "*Mercati finanziari e gestione del rischio*", isedi, pag.186.

[9] Cesari R., Susini E. (2005), "*Introduzione alla finanza matematica. Concetti di base, tassi e obbligazioni*", McGraw-Hill, pag. 140-141.

$$P_{(0,\, t)} = e^{-i(0,t)t}$$

mentre per la stima dei parametri si deve minimizzare

$$\min_{b} \sum_{i=1}^{n} [P_i - P_i^{stima}]^2 w_i$$

dove si ricerca il vettore dei parametri che minimizza la somma pesata della differenza tra i prezzi osservati e i prezzi teorici dei titoli considerati.

Il modello di Svensson (1994)[10]

Il modello di Svensson generalizza quello di Nelson-Siegel, N-S, (è una sua estensione) includendo due nuovi parametri, b_3 e h, con lo scopo di rendere la forma funzionale del tasso forward istantaneo più flessibile, e quindi maggiormente adattabile alla SpS effettiva, soprattutto nel breve periodo. In questo modo, la SpS descritta dal modello riesce ad avere più forme: oltre alle due monotone, e a quella a gobba, riproduce comportamenti ad U e a S[11]. La sua esplicitazione è

$$i_{(0;\, t,\, t)} = b_0 + b_1\, e^{-\frac{t}{k}} + b_2\, \frac{t}{k} e^{-\frac{t}{k}} + b_3\, \frac{t}{h} e^{-\frac{t}{h}}$$

da cui si può ricavare la curva dei tassi spot, la SpS,

$$i_{(0,\, t)} = \frac{1}{t}\int_0^t i(0;\, s, s)ds = b_0 + (b_1 + b_2)\, \frac{1 - e^{-\frac{t}{k}}}{t/k} - b_2\, e^{-\frac{t}{k}} + b_3\, \left(\frac{1-e^{-\frac{t}{h}}}{t/h} - e^{-\frac{t}{h}}\right)$$

dalla quale il modello di N-S è un caso particolare, con $b_3 = 0$: se il modello di N-S può essere scritto come la somma di tre componenti, il modello di Svensson

[10] Svensson L. E. O. (1994), "*Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-94*", IMF Working Paper 114.

[11] D'Agostino G., Antonio Guglielmi A (2011), "*Il modello matematico sottostante alla curva dei rendimenti della BCE*", Matematicamente.it Magazine.

è la risultante di quattro componenti, dove il quarto termine, $b_3\ (\frac{1-e^{-\frac{t}{h}}}{t/h} - e^{-\frac{t}{h}})$, genera una seconda gobba (o una forma ad U) con i due nuovi parametri, b_3 e h. Il comportamento di questa nuova componente è del tutto simile alla componente di medio termine del modello di N-S.

La procedura di stima dei sei parametri segue le stesse orme del programma di ottimizzazione descritto sia per il modello di McCulloch che per N-S.

3. Altri modelli statistico-parametrici

Qui di seguito, farò cenno ad altri modelli inquadrabili in questo approccio[12].

Il modello Cohen-Kramer-Waugh (1966)[13]

Nel modello proposto da Cohen, Kramer e Waugh, il rendimento $i_{(t,\ T)}$ diventa funzione della scadenza, della scadenza al quadrato e del quadrato del logaritmo sempre della vita residua

$$i_{(t,\ T)} = a + bT + cT^2 + d\ (\ln T)^2$$

Questo modello viene citato come uno dei modelli primordiali dei modelli interpolanti. I suoi limiti si concentrano principalmente sulla sua scarsa duttilità nell'adattarsi ai differenti casi di forma della SpS[14].

---

[12] Cerca: Stander Y. S. (2005), "*Yield curve modeling*", Palgrave McMillan
[13] Cohen K. J., R. L. Kramer, W. H. Waugh. (1966) "*Regression Yield Curves for U. S. Government Securities*." Management Science, 13, B168-175.
[14] Cerca: Pham Y. M. (1997), "*Yield curve fitting: A new methodology*", Tenth Australasian Finance and Banking Conference, The University of New south Wales, Sydney, Australia.

Il modello di Bradley-Crane (1973)[15]

Per ottimizzare i risultati della stima della SpS, una strada battuta è stata quella di operare mediante logaritmi. Una applicazione di questo tipo è quella proposta da Bradley e Crane (1973)[16], i quali trasformano i rendimenti e le scadenze in forma logaritmica, regredendo l'indicatore di rendimento alla propria scadenza T

$$ln[1 + i_{(t,\,T)}] = a + b \cdot T + c \cdot ln(T)$$

dove $i_{(t,\,T)}$ è il tasso di rendimento con scadenza (*maturity*) T, mentre a, b, c sono i parametri da stimare.

Secondo i due studiosi, l'utilizzo della trasformata logaritmica dovrebbe consentire un migliore adattamento delle curve alla dinamica dei tassi. In realtà, la curva interpolante che essi propongono non segue la SpS nei suoi spostamenti "a cucchiaio", rimanendone distaccata e mancando di flessibilità[17].

Il modello di Echols-Elliot (1976)[18]

Echols ed Elliot propongono una funzione interpolante che attenui la distorsione dovuto al fattore di disturbo legato alle caratteristiche delle cedole. La relazione che propongono è di tipo tridimensionale nella seguente forma

$$ln[1+i_{(t,\,T)}] = a + b \cdot (1/T_i) + c \cdot T_i + d \cdot C_i$$

dove $i_{(t,\,T)}$ indica il rendimento del titolo i-esimo e C è l'ammontare della sua cedola, mentre a, b, c, d sono i parametri da stimare.

Nel caso in cui si volesse determinare la struttura dei rendimenti degli zero-coupon sarebbe possibile con questa equazione di stima considerare la

---

[15] Bradley S. P., Crane D. B. (1973), "*Management on commercial bank government security portfolio:an optimisation approach under uncertainty*", Journal of bank research 18.

[16] Considerato una variante di Cohen, Kramer e Waugh (1966).

[17] Stander Y. S. (2005), "*Yield curve modeling*", Palgrave McMillan, pag 34-35.

[18] Echols E. M., Elliot J. W. (1976), "*A quantitative yield curve model for estimating the term structure of interest rate*", Journal of financial and quantitative analysis 87.

cedola nulla e utilizzare esclusivamente i coefficienti della regressione a, b, c. Anche questa forma ha il limite di essere poco flessibile, e quindi non si adatta bene ad alcuni comportamenti dei tassi[19].

Il modello di Dobbie-Wilkie (1978, 1979)[20][21]

Il modello di Dobbie-Wilkie ha la seguente forma funzionale

$$i_{(t,\,T)} = b_0 + b_1 \cdot exp\{-a_1 T\} + b_2 \cdot exp\{-a_2 T\}$$

dove $i_{(t,\,T)}$ è il rendimento alla scadenza T, mentre i b_j e gli a_h sono i parametri da stimare, rispettivamente i primi con regressione lineare, e i secondi con regressione non lineare.

Questa funzione è stata studiata da diversi autori[22] che l'hanno caratterizzata come un modello suscettibile di "*catastrophic jump*" (questo termine è usato per descrivere il fatto che la regressione 'fitta' salti da un set di parametri ad un altro completamente differente.

Il modello di Ayres-Barry (1979)[23]

Il modello di Ayres-Barry è della forma

$$i_{(t,\,T)} = i_\infty + e^{-b(T-t)}(i_0 - i_\infty)$$

dove i_∞ è il rendimento di lunghissimo termine, i_0 è il rendimento di brevissimo termine, b è il parametro da stimare.

---

[19] Stander Y. S. (2005), "*Yield curve modeling*", Palgrave McMillan, pag 36.

[20] Dobbie G. M., Wilkie A. D. (1978), "*The FT actuaries fixed interest indices*", Journal of institute of actuaries, vol 105, pp 15-26.

[21] Dobbie, G.M. , Wilkie, A.D. (1979) "*The FT-Actuaries Fixed Interest Indices. Transactions of the Faculty of* Actuaries" 36, 203-213.

[22] Cerca tra gli altri: Cairns, R. D., (1998) "Sufficient conditions for a class of investment problems," Journal of Economic Dynamics and Control, Elsevier, vol. 23(1), pages 55-69.

[23] Ayres H. F., Barry J. Y. (1979) "*The Equilibrium Yield Curve for Government Securities*", Financial Analysts Journal, Vol. 35, No. 3 (May - Jun., 1979), pp. 31-39.

I limiti sono dovuti al fatto che tale forma proposta non è flessibile per tutti i casi, e quindi ha gli stessi difetti del modello di Bradley-Crane (1973) e del modello di Echols-Elliot (1976)[24].

4. Il filone delle Splines

"*La parola 'spline' indica, in inglese, una chiave che, fissata ad una di due parti meccaniche, connette tra loro le due parti. In finanza, il concetto è esattamente lo stesso: si cerca di connettere tra loro i punti di una curva utilizzando una funzione a pezzi*"[25].

Mentre con i classici metodi di interpolazione, come quelli visti sopra, si utilizza una sola forma funzionale per tutto il campione, con il metodo delle *Splines*[26], invece, dopo aver diviso il campione in sottogruppi, ognuno di questi può essere interpolato separatamente dagli altri, pur utilizzando lo stesso funzionale, ma avendo stime differenti per i parametri.

In questo modo, si può raggiungere un buon adattamento della curva stimata ai dati, utilizzando non un solo polinomio ma diversi, magari di grado uguale: si disegnano, cioè, curve "regolari", con un certo grado di continuità, attraverso punti prefissati, i nodi, (che non sono altro che i punti di congiunzione delle differenti curve interpolanti), realizzando una "spezzata", una *funzione polinomiale a tratti*, che interpola più efficacemente la SpS osservata.

Il primo a suggerire l'utilizzo delle "Splines" fu McCulloch (1971)[27], nel tentativo di risolvere i problemi legati al singolo funzionale[28]. In un primo momento, McCulloch aveva impiegato le curve Splines di tipo quadratico, il cui inconveniente è quello di creare delle "nocche" nella curva forward in

[24] Stander Y. S. (2005), "*Yield curve modeling*", Palgrave McMillan, pag 36.
[25] Menoncin F. (2006), "*Mercati finanziari e gestione del rischio*", isedi, pag.189.
[26] Per una trattazione sintetica sul metodo delle 'Splines' vedi: Martellini L., Priaulet P. (2003), "*Fixed-Income Securities*", Wiley, pag. 104 e seguenti.
[27] McCulloch J. H. (1971), "*Measuring the term structure of interest rate*", Journal of Business 44, 19-31.
[28] Vedi precedentemente, in questo capitolo.

corrispondenza dei punti di raccordo dei polinomi[29]: questo è originato dal fatto che la derivata seconda della funzione di sconto, e quindi la derivata prima del tasso forward, risulta in questo caso discontinua. In seguito, McCulloch (1975)[30] optò per le Spline cubiche, che si dimostreranno più efficaci.

Una *funzione polinomiale a tratti* deve soddisfare le seguenti esigenze[31]:

- in ogni punto di raccordo, cioè per ogni nodo, il valore del due Splines che vi giungono deve essere lo stesso: questo significa che il polinomio interpolante deve essere continuo nei nodi;
- il passaggio da una parte all'altra dei pezzi di segmento, attraverso il nodo, deve avvenire in maniera graduale: questo significa che in ogni nodo le Splines devono avere lo stesso valore della derivata prima;
- inoltre, il passaggio da una forma concava ad una convessa, o viceversa, deve realizzarsi in modo graduale, richiedendo, cioè, che nei punti di raccordo siano uguali le derivate seconde.

L'utilizzo del metodo delle Splines pone però quattro possibili problemi[32]:

- il primo è legato alla decisione del numero ottimo di sottogruppi, ovvero del numero dei nodi: all'aumentare del numero delle Splines l'approssimazione migliora, ma la curva diventa sempre più irregolare per eccessivo adattamento (*overfitting*); mentre, un numero troppo esiguo non riesce ad accostarsi bene a dati che subiscono una variazione brusca[33];
- il secondo è dato dalla decisione di dove porre i nodi: i tratti sono troppo piccoli, da un lato, si ha un più stretto adeguamento, dall'altro, troppe perturbazioni (la situazione migliora con segmenti più ampi, ma si perde l'aderenza con i dati);

---

[29] Martellini L., Priaulet P. (2003), "*Fixed-Income Securities*", Wiley, pag. 108.
[30] McCulloch J. H. (1975), "*The tax-adjusted yield curve*", Journal of Finance, 30, 811-830.
[31] Menoncin F. (2006), "*Mercati finanziari e gestione del rischio*", isedi, pag.190.
[32] Menoncin F. (2006), "*Mercati finanziari e gestione del rischio*", isedi, pag.191.
[33] Martellini L., Priaulet P. (2003) riportano diversi metodi, tra i quali un metodo interessante per la determinazione del numero ottimo di splines è quello basato sugli scarti medi delle regressioni, anche se uno tra i più seguiti è, invece, quello di porre tale numero uguale alla radice quadrata del numero di obbligazioni utilizzate nella stima, che ha il vantaggio di porre il numero in diretta dipendenza con il numero delle osservazioni [metodo proposto per la prima volta da McCulloch (1975)].

- il terzo problema invece è quello di decidere la forma e il grado del funzionale da utilizzare: in letteratura la scelta prediletta è stata[34] o per un polinomio di terzo grado, o per un'esponenziale di terzo grado, o per una combinazione di essi;
- il metodo delle Splines può esibire particolarità problematiche sulla realizzazione della curva interpolante, come, ad esempio, una veloce crescita o decrescita per lunghe scadenze.

Espongo in maniera sintetica, qui di seguito, alcuni modelli che utilizzano la metodologia delle Splines.

Il modello di Vasicek-Fong (1982)[35]

Vasicek e Fong (1982) hanno proposto un criterio per un'interpolazione asintotica maggiormente realistica della curva dei tassi forward. Partendo dall'assumere che la funzione di sconto abbia una forma esponenziale, essi ritengono che le Splines normalmente utilizzate nei modelli accademici non danno un buon adattamento locale della funzione di sconto, e che, inoltre, le Splines polinomiali usate da McCulloch non possono essere adattate per ottenere una forma esponenziale della funzione di sconto quando la scadenza tende verso infinito.

Vasicek e Fong, per stimare la funzione di sconto, propongono di utilizzare le Spline cubiche, proponendo una funzione di sconto tra due nodi successivi che assume la forma:

$$\delta(t) = b_0 + b_1 e^{-at} + b_2 e^{-2at} + b_3 e^{-3at}$$

dove i coefficienti b_i sono i parametri da stimare.

[34] Vedi modelli presentati sopra.
[35] Vasicek O. A., Fong H. G. (1982), "*Term structure modeling using exponential splines*", Journal of Finance 37, 2, 339(348).

Il modello di Langetieg e Smoot (1989)[36]

Come variante del modello di Vasicek e Fong, Langetieg e Smoot (1989) hanno proposto di stimare, usando le Spline cubiche esponenziali, la curva dei tassi spot, e non la funzione di sconto, sostenendo che la scelta di un modello esponenziale produce migliori risultati piuttosto che stimare la funzione di sconto direttamente con una Spline cubica.

Il modello di Coleman-Fisher-Ibbotson (1992)[37]

Coleman, Fisher e Ibbotson (1992) hanno stimato la curva relativa al tasso forward, sostenendo che fissare, su un certo periodo, il tasso forward ad una costante porta ad una stima migliore, invece di impiegare una Spline cubica o quadratica. Il risultato è stato che la funzione di sconto prodotta dal modello risultava continua, con derivata prima discontinua. Ma questo, per gli autori, non sarebbe un problema, poiché l'unico vincolo richiesto sulla funzione di sconto era che questa risultasse monotona decrescente, e che ulteriori limiti non vengono giustificati da un punto di vista strettamente finanziario.

Un'analisi critica: il modello di Shea (1984)[38]

Shea (1984) ha criticato la modellizzazione attraverso l'uso delle Splines: egli, presentando una serie di risultati empirici, ha osservato diversi problemi che nascono nell'adottare tali funzioni per approssimare la SpS. Infatti, egli ha provato che:

- le Spline cubiche usate da McCulloch non legano la funzione di sconto alla proprietà di monotonia, così che una stima della stessa funzione di sconto, per lunghe scadenze, poteva produrre valori negativi della curva dei tassi forward;

[36] Langetieg T. C., Smoot J. S. (1989) "*Estimation of the term structure of interest rates*", Research in Financial Services 1, 181(222).
[37] Coleman T. S., Fisher L., Ibbotson R. G. (1992), "*Estimating the term structure of interest rates from data that include the prices of coupon bonds*", Journal of Fixed Income 85(116).
[38] Shea G. S. (1984), "*Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: Equilibrium models and spline approximations*", Journal of Financial and Quantitative Analysis 19, no.3 253(269).

- le Spline esponenziali usate da Vasicek e Fong non generavano stime più raffinate della SpS rispetto a quelle polinomiali.

Un suggerimento alternativo avanzato da Shea è stato quello di servirsi di vincoli "ad hoc" sulla locazione dei nodi e sulla derivata prima della funzione di sconto.

5. Un'applicazione: il modello di stima della BCE

La BCE usufruisce del modello di Nelson–Siegel–Svennson per la stima della SpS riferita al mercato dell'Unione[39].

Sin dal 2004, giornalmente, la Banca Centrale Europea diffonde le stime di due curve dei tassi, calcolati sulle quotazioni del MTS (Mercato dei Titoli di Stato): la prima viene effettuata sui prezzi di titoli di Stato con rating (Fitch)[40] AAA (è la stima della SpS che definisce il *risk-free* dell'area euro: sono i titoli di debito pubblico con la valutazione del rischio di credito più favorevole); l'altra curva fa riferimento ai prezzi di tutti gli altri titoli di Stato dell'area euro[41], selezionati attraverso una serie di determinate regole.

In tutti e due i casi, sono esaminati solo titoli in euro, a struttura deterministica (titoli senza cedola e titoli con cedola fissa), *maturity* da 3 mesi a 30 anni, con un volume proposto sul mercato primario di almeno 5 miliardi di euro, e realmente scambiato nell'arco della quotazione giornaliera.[42]

I criteri di selezione delle obbligazioni[43] sono:

- sono scelte solo obbligazioni in euro emesse dal governo centrale dell'Unione Monetaria;

[39] D'Agostino G., Guglielmi A. (2011) "*Il modello matematico sottostante alla curva dei rendimenti della BCE*", in Matematicamente.it Magazine.
[40] Per il rating fornito da Fitch Ratings cerca in: www.fitchratings.com.
[41] European Central Bank, Eurosystem: https://www.ecb.europa.eu/home/html/index.en.html.
[42] European Central Bank, Eurosystem, "*General description of ECB yield curves methodology*": http://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html.
[43] Le informazioni sulle obbligazioni e sui prezzi sono fornite da EuroMTS Ltd: www.euromts-ltd.com

- le obbligazioni strutturate in maniera particolari, comprese quelle con specifici provvedimenti istituzionali, sono estromesse dal vaglio;
- sono prese in considerazione unicamente titoli a cedola fissa con scadenza finita e obbligazioni zero coupon, tra cui STRIPS (trading separato di interessi e capitale); i titoli a cedola variabile, comprese le obbligazioni indicizzate all'inflazione e le obbligazioni perpetue, vengono escluse;
- sono scelti unicamente i titoli governativi negoziati attivamente con un massimo spread denaro-lettera di tre punti base (per il calcolo della SpS vengono considerati i prezzi di chiusura al giorno di riferimento;
- per avere un'adeguata *profondità di mercato*, il "margine temporale di scadenza residua" è stato fissato da un minimo di tre mesi fino ad un massimo di 30 anni;
- ai titoli che hanno superato i criteri di selezione di cui sopra viene applicato un meccanismo di rimozione degli "outliers";
- i titoli i cui rendimenti scendessero al di sotto del doppio della deviazione standard del rendimento medio nella stessa fascia di maturità vengono automaticamente rimossi.

Tale procedura viene ripetuta tutti i giorni.

Entrando nello specifico, il procedimento usato dalla BCE per quantificare prezzi e rendimenti è il seguente, e rispecchia la stessa procedura di stima dei modelli parametrici visti sopra:

- si stimano i parametri della curva mediante un algoritmo di modellazione che *minimizza la somma della differenza quadratica tra i rendimenti calcolati e i rendimenti effettivamente misurati*.
- i rendimenti vengono calcolati secondo la formula della International Securities Market Association riferita ad *un prestito obbligazionario fisso interamente rimborsato con una data di rimborso unica fissata*.

Utilizzando la notazione della BCE[44], per un'obbligazione a cedola fissa, che paga *h* volte l'interesse per anno, con una data di rimborso unica fissata,

[44] European Central Bank, Eurosystem, "General description of ECB yield curves methodology": http://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html.

l'equazione la cui incognita è il tasso di rendimento del titolo mantenuto fino a scadenza può essere esplicitata come segue:

$$P = v^{f1}\left(k + \sum_{i}^{n-1} \frac{g}{h} v^{i}\right) + \left(C + \frac{g}{h} f_2\right) v^{m+f1+f2-1}$$

dove:

- P = prezzo lordo del titolo alla chiusura del giorno lavorativo precedente;
- g = tasso cedolare annuale in percentuale;
- k = prima o successiva cedola in percentuale;
- h = numero di cedole nell'anno;
- m = numero di pagamenti cedola al rimborso;
- f1 = frazione del numero di giorni di calendario dalla data di valuta al primo/successivo pagamento di interessi;
- f2 = frazione del numero di giorni di calendario dall'ultima data coupon normale al rimborso;
- C = valore di riscatto;
- v = fattore di sconto. $v = 1/(1 + i)$, dove i è il tasso effettivo di rendimento a scadenza.

  Inoltre:

  - le scadenze sono quelle del "regolamento", in base alle pratiche di mercato delle singole obbligazioni;
  - il conteggio dei giorni viene fatto utilizzando le consuetudini del mercato, come eff/360, ovvero act/act, o ancora basato sulla convenzione 30/360, a seconda del tipo di obbligazioni e della residenza dell'emittente;
  - non sono arrecati adattamenti che includano effetti fiscali o cedolari;
  - le stime dei parametri del giorno TARGET precedente vengono utilizzate come dati di partenza per i calcoli successivi di TARGET.

Dalla struttura per scadenza dei tassi a pronti la BCE ricava anche quella implicita dei tassi a temine.