

Reti Complesse

&

Gestione del

Portafoglio

Finanziaria

un ULTIMA FRONTIERA

di Matteo Maggio

Indice

Capitolo 1

Introduzione pag. 4

Capitolo 2

Complex Networks: Studio e sviluppo storico dei Grafi pag. 3

2.I Introduzione: Concetti Definitivi pag. 5

2.II Storia delle reti pag. 6

2.III Coefficiente di clustering pag. 9

2.III.I Coefficiente di clustering locale pag. 10

2.III.II Coefficiente di clustering globale pag. 11

Capitolo 3

Modello di Markowitz con l'uso delle Complex Network per la gestione

dei Fondi Pensione pag. 12

3.I Spiegazione del lavoro effettuato pag. 12

3.I.II Spiegazione dei dati utilizzati pag. 18

3.II Risultati ottenuti pag. 20

Codice Matlab pag. 22

Bibliografia pag. 25

Capitolo 1

Introduzione

Fin dall'inizio del ventunesimo secolo, la *scienza delle reti* si è affermata come strumento valido per l'analisi di molti sistemi. Teorie inizialmente sviluppate nell'ambito del calcolo delle probabilità sono state dapprima riprese per la fisica dei sistemi complessi e successivamente estesi allo studio dell'economia e della finanza. La crescente quantità di studi che utilizza le *Complex networks* ha permesso di individuare dipendenze non enfatizzate da altri strumenti statistico-matematici e di apportare nuovi contributi a modelli esistenti.

Da un punto di vista astratto, e in primo luogo, possiamo definire una rete come un insieme di unità, denominate nodi, o anche vertici. Una relazione tra due nodi è rappresentata da un arco che li unisce.

Lo scopo di questo elaborato è quello di proporre un'analisi, non svolta precedentemente, sulle modalità d'investimento dei fondi pensione, analizzando un nuovo modo decisionale inerente alle quote di titoli da detenere: ci si propone di gestire il portafoglio tramite l'approccio classico del modello a "Minimo Rischio" di Markovitz, per poi confrontarne i risultati con un approccio innovativo, integrando metodologie proprie delle Complex Networks, proposto nel lavoro [Asset allocation: new evidence through network approaches](#), GP Clemente, R Grassi, A Hitaj - *Annals of Operations Research*, 2019.

Per gestione di portafogli si intende la gestione, su base discrezionale e individualizzata, di portafogli di investimento che includono uno o più strumenti finanziari e nell'ambito di un mandato conferito dai clienti. I clienti, quindi, si avvalgono della professionalità e delle competenze delle SGR (società gestione risparmio) che, nell'ambito del mandato conferito loro, provvedono a gestire in modo discrezionale i portafogli di investimento al fine di incrementarne il valore nel corso del tempo.¹

¹ <http://www.assogestioni.it/index.cfm/1,577,0,49,html/gestione-di-portafogli>

Il rendimento di un portafoglio finanziario può essere influenzato, oltre che dall'andamento dei singoli titoli o strumenti finanziari che lo compongono, anche dallo stile di gestione adottato dal gestore professionista ovvero dall'investitore fai-da-te: è possibile infatti distinguere tra gestione attiva (la costruzione e la gestione professionale di un portafoglio finanziario) e gestione passiva (la costruzione di un portafoglio di investimento come replica di uno o più indici di mercato).²

In sintesi, l'obbiettivo è verificare se l'approccio classico risulti essere maggiormente efficace nell'investimento rispetto a quello modificato tramite le Complex networks, quando per "efficacia di un investimento" intendiamo la massima minimizzazione possibile del rischio a profitto costante.

^{2 2} <http://www.assogestioni.it/index.cfm/1,410,0,49,html/la-gestione-dei-portafogli-finanziari>

Capitolo 2

Complex Networks

Studio e sviluppo storico dei Grafi

Questo lavoro si basa sull'utilizzo delle Complex networks, su cui ci sono molti studi recenti. La terminologia adottata per descrivere le reti dipende dalla disciplina che se ne occupa: reti per i fisici, grafi per matematici ed informatici.

Quello che differenzia le Complex networks da altri studi delle reti riguarda l'obiettivo dell'analisi. Per esempio, nelle reti di trasporto sono frequentemente affrontati i problemi della capacità della rete. Nelle Complex networks viene invece frequentemente considerato il ranking (l'ordine di importanza) degli elementi che la compongono, insieme all'esame dei cluster.

Da un punto di vista astratto, e in primo luogo, possiamo definire una rete come un insieme di unità, denominate nodi, o anche vertici, che sono uniti da archi, o bordi.

2.1 Introduzioni Concetti Definitivi

*“Una rete (o Networks), è un insieme di unità, chiamate anche nodi o vertici, uniti da archi, chiamati anche collegamenti. Inoltre, di fatto rappresentata una relazione binaria: ogni volta che c'è una relazione tra due nodi, c'è un arco che li unisce. Nessun arco può avere un'estremità libera”.*³ Tale definizione, in realtà, è la stessa usata in Matematica per indicare un grafo, la differenza nella terminologia è dovuta all'area scientifica in cui si sono sviluppati gli studi, spesso con obiettivi diversi. Il termine Complex si riferisce al tipo di struttura, che deve essere non banale.

Qui utilizzeremo la stessa notazione dei *grafi* per descrivere la *rete*, $G = (V, E)$ dove G identifica il *grafo*, V indica l'insieme non vuoto dei nodi ed E è l'insieme degli archi.

³ *“Introduction and historical traits: the raise of interest in networks”*

Quindi, le caratteristiche peculiari di una rete possono essere tranquillamente elencate facendo uso delle proprietà elementari dei grafi⁴:

- dati qualsiasi coppia di vertici u e v il grafo si dice orientato se la coppia $(u, v) \neq (v, u)$, altrimenti il grafo si dice non orientato
- un *grafo* si definisce banale, o nullo, se l'insieme E è vuoto;
- due vertici sono adiacenti se appartengono allo stesso spigolo;
- uno spigolo si definisce cappio se i suoi due vertici coincidono
- se per ogni coppia di vertici esiste al massimo uno spigolo allora il *grafo* si definisce semplice, altrimenti si definisce multigrafo;
- se consideriamo lo spigolo (u, v) di un grafo orientato allora diremo che lo spigolo è uscente da u ed entrante in v .

Questi attributi, descrivendo le caratteristiche di un grafo, realizzano i requisiti di una *rete*.

2.11 Storia delle reti

Il primo cenno storico del CN risale al 1736 quando Eulero cercò una risposta all'enigma dei sette ponti di Koenisberg. Questa città, oggi conosciuta come Kaliningrad è attraversata da un fiume, che ha due isole, collegate attraverso sette ponti. La domanda principale era: è possibile partire da un punto della città e tornare là passando attraverso tutti i ponti esattamente una volta?

In termini moderni il problema può essere posto nel seguente modo: è possibile trovare un percorso che inizia e finisce nello stesso punto, e cioè è possibile realizzare un circuito chiuso? Eulero dimostrò che è impossibile risolvere il problema e per farlo gettò le basi della teoria dei grafi.

⁴ Liverani M. (2014), "Elementi di Teoria dei Grafi", Dispense del Corso di Ottimizzazione Combinatoria, Università Roma Tre.

Ulteriori impulsi alla teoria dei grafi arrivarono nel 1857 quando Cayley per risolvere un problema di chimica utilizzò il *grafo*.

In realtà, il nome *grafo* fu coniato solo nel 1878 da Sylvester nel *Nature*, sempre in relazione ad un problema di chimica. Ulteriori contributi furono dati da Pólya tra il 1935 e il 1937 e da De Bruijn nel 1959. Inoltre, si può notare che questa vicinanza alla Chimica influenzò alcuni dei termini standard usati nella teoria dei grafi.

Nell'ambito della matematica pura si deve nominare il matematico Erdos che, in collaborazione con Renyi, contribuì all'ulteriore interesse all'inizio del XXI secolo sulle *Random Networks*, in cui gli archi sono distribuiti in maniera casuale. L'obiettivo principale dell'analisi era di determinare delle soglie per la densità degli archi in modo da avere grafi convessi.

Un ulteriore forte sviluppo nello studio delle reti si ha in ricerca operativa. Una prima vera svolta nella ricerca operativa delle *Complex Networks* (nello specifico con lo studio di supporti decisionali), durante le due Guerre Mondiali per la necessità di gestione delle risorse, di pianificazione nello spostamento di truppe e per lo sviluppo di strategie offensive e difensive. I problemi di RO riguardavano principalmente lo studio di strutture discrete, ossia i *grafi*, che si basavano su algoritmi che avevano il compito di calcolare, ad esempio, il percorso ottimale tra due punti per lo spostamento delle truppe.

Un altro campo di studi che ha favorito lo sviluppo e la diffusione degli studi sulla CN è la Fisica Teorica. In particolare, il campo della Meccanica Statistica, il quale utilizza la teoria delle probabilità per studiare il comportamento medio di un sistema il cui stato è incerto. Troviamo numerosi punti di contatto con lo studio del fenomeno chiamato *percolazione*. La *percolazione* riguarda il movimento ed il filtraggio di fluidi attraverso materiali porosi, formalizzando il fenomeno possiamo considerarlo come il comportamento di un fluido in un sistema di unità (o nodi) collegate da archi.

Un lavoro che può essere considerato come punto importantissimo per lo sviluppo delle applicazioni delle reti nelle scienze sociali è la Pubblicazione di Yamir Moreno nel 1934, "The network as hierarchy", per comprendere la diffusione dell'innovazione. In particolare, utilizzò la teoria dei grafi per un esperimento: studiò in due comunità di

contadini da 300 membri l'introduzione dell'innovazione agricola del mais ibrido. L'obbiettivo era osservare come e in quanto tempo questa innovazione si sarebbe diffusa. Notò che all'inizio le due popolazioni erano divise in due parti: coloro che avevano subito accolto il nuovo mais al posto di quello vecchio e invece coloro che lo avevano rifiutato. Lo studio divenne importante e innovativo quando, con il passare del tempo, i contadini che si erano rifiutati all'inizio ma interagendo con i propri vicini decisero di prenderlo in considerazione nelle proprie coltivazioni. Così alla fine dell'esperimento tutti i contadini delle due comunità utilizzavano solo mais ibrido.

Negli anni 50 gli scienziati sociali iniziarono a concentrarsi sugli studi dei fenomeni collettivi, uno tra gli esperimenti più importanti che riguarda il fenomeno collettivo avviene nel 1967 dovuto a Stanley Milgram⁵. Egli selezionò, in modo casuale, un gruppo di statunitensi del Midwest e chiese loro di spedire un pacchetto a un estraneo che abitava nel Massachusetts, a diverse migliaia di chilometri di distanza. Ognuno di essi conosceva il nome del destinatario, il suo impiego e la zona in cui risiedeva, ma non l'indirizzo preciso. Fu quindi chiesto a ciascuno dei partecipanti all'esperimento di spedire il proprio pacchetto a una persona da loro conosciuta, che a loro giudizio poteva avere la maggiore probabilità di conoscere il destinatario finale. Quella persona avrebbe fatto lo stesso, e così via, fino a che il pacchetto non fosse stato consegnato al destinatario finale. Alcune delle lettere arrivarono in un paio di passaggi altri in 9 o 10, l'ultima lettera arrivò a destinazione dopo circa 20 anni.

Solo 64 delle 296 lettere iniziali arrivarono a destinazione e in media i passaggi erano circa 6. Quindi, le conclusioni furono che le persone negli Stati Uniti hanno circa sei gradi di "separazione" nelle relazioni sociali, sebbene Milgram non abbia mai usato questa frase. Anche se è possibile mettere in risalto alcune critiche metodologici alla base di questo esperimento, esso è servito per dimostrare che le idee iniziali erano abbastanza valide. Si è dimostrato, cioè, che la distanza tra le persone è veramente piccola, ed è questo concetto ad essere stato il seme per gli studi e gli esperimenti futuri.

⁵ Milgram, Stanley. (1974), *Obedience to Authority; An Experimental View*. Harpercollins

Negli anni 70 si è definito un linguaggio universale condiviso da matematici, chimici, ingegneri elettrici e sociologi, questo ha permesso l'evoluzione di concetti come "Minimum Spanning Tree"⁶ e "Planarity"⁷, successivamente utilizzati in CN per evidenziare gli elementi più importanti delle reti empiriche.

L'impulso innovativo lo percepiamo ancora oggi, nel primo ventennio del XXI secolo, in molte applicazioni legate all'Economia, alla Finanza, alle Scienze Sociali e ai Big Data. In particolare, gli studi di scienziati come Watts, Strogatz, Albert, Barabasi e Newman forniscono un primo nucleo di domande che diventeranno centrali nell'evoluzione delle Complex Networks: l'individuazione delle proprietà di Small World, distribuzione del scale-free, misure di centralità, diffusione di epidemie e contagi. È da ricordare che questi concetti sono impiegati per descrivere fenomeni come "too big to fail", studiare i crolli delle istituzioni finanziarie e studiare la diffusione dell'opinione pubblica.⁸

2.III Coefficiente di clustering

Nella teoria dei *grafi* ha un'importante rilevanza il coefficiente di cluster. Esso viene definito come la misura del grado alla quale i nodi di un *grafo* tendono ad essere legati tra di loro. Nelle *reti* del mondo reale, particolarmente nelle *reti* sociali, i nodi creano gruppi fortemente uniti tra di loro e caratterizzati da una densità di collegamenti relativamente alta; e possiamo quindi notare che il coefficiente di clustering delle *reti* sociali tende a essere maggiore rispetto a quello calcolato sulle *reti* generate casualmente.

Ci sono due tipologie di coefficiente di clustering: coefficiente di clustering globale che descrive il fenomeno generale di clustering dell'intera *rete*; e il coefficiente di

⁶"Un albero di copertura o albero di connessione o albero di supporto di un grafo, connesso e con archi non orientati, è un albero che contiene tutti i vertici del grafo e contiene soltanto un sottoinsieme degli archi, cioè solo quelli necessari per connettere tra loro tutti i vertici con uno e un solo cammino." Fonte: Wikipedia

⁷"Nella teoria dei grafi, un grafico planare è un grafico che può essere incorporato nel piano, vale a dire che può essere disegnato sul piano in modo tale che i suoi bordi si intersechino solo ai loro estremi. In altre parole, può essere disegnato in modo che nessun bordo si incroci." Fonte: Wikipedia

⁸ Da aggiungere

clustering locale che riguarda, invece, la connessione dei singoli nodi presi in considerazione.

2.III.1 Coefficiente di clustering locale

Definendo “triangolo” un insieme di tre nodi (i) uniti da 3 archi, indichiamo che il coefficiente di clustering locale (CCL) di un nodo all’interno di un *grafo* misura i triangoli esistenti che includono i rispetto al numero di triangoli possibili che includono i . Duncan J. Watts e Steven Strogatz nel 1998⁹ per determinare se un grafo entrasse oppure no nella teoria del *Piccolo Mondo* introdussero questa nuova misura.

Indicheremo con $G=(V, E)$ il *grafo* costituito da V , l’insieme dei vertici, e da E , l’insieme dei collegamenti e inoltre indichiamo con e_{ij} il collegamento che lega i vertici v_i e v_j ; con N_i l’insieme dei vicini di un vertice, ossia tutti i vertici direttamente collegati ad esso, e nello specifico k_i come la cardinalità di N_i , ossia il numero di nodi vicini.

Inoltre, dobbiamo distinguere due casi: nel caso in cui il *grafo* sia orientato allora nel calcolo del coefficiente di clustering locale e_{ij} è distinto da e_{ji}

$$C_i = \frac{|\{e_{jk}:v_j,v_k \in N_i, e_{jk} \in E\}|}{k_i(k_i - 1)}$$

invece nel caso di *grafo* non orientato e_{ij} è considerato identico a e_{ji}

$$C_i = \frac{2 \cdot |\{e_{jk}:v_j,v_k \in N_i, e_{jk} \in E\}|}{k_i(k_i - 1)}$$

C_i è definita come la probabilità che due vicini di i scelti a caso siano connessi da archi. È un numero compreso tra 0 e 1: se è uguale a 0 allora tutti i nodi vicini di sono indipendenti tra di loro; mentre se è uguale a 1 i vicini del nodo formano un grafo completo.

⁹ Duncan J. Watts e Steven Strogatz (1998), “Collective dynamics of “small-world” networks”, Nature, Vol.393

2.III.II Coefficiente di clustering globale

Il calcolo del coefficiente di clustering globale (CCG) riguarda triple di nodi, dove ogni tripla è incentrata su un nodo. Per tripla s'intende tre nodi connessi da due (trippla aperta) o tre (trippla chiusa) collegamenti.

Sono presenti in letteratura due tipologie diverse di calcolo del CCG:

- Un primo tentativo di calcolo elaborato da Robert D. Luce e Albert D. Perry nel 1949¹⁰. Dove viene definito il coefficiente di clustering globale come il rapporto tra il numero di triple chiuse e il numero totale di triple, che equivale alla somma delle triple aperte e delle triple chiuse;
- Mentre una seconda tipologia di calcolo fu elaborata da Watts e Strogatz¹¹ dove il coefficiente di clustering globale è calcolato come la media dei coefficienti locali:
“Supponiamo che un nodo v abbia k_v vicini; allora possono esistere al massimo $k_v(k_v - 1)/2$ collegamenti fra loro (ciò accade quanto tutti i vicini di v sono connessi fra loro). Denotando con C_v la frazione di tali collegamenti che effettivamente esiste, si definisce C come la media dei C_v fratto il numero di nodi”.

La seconda tipologia di calcolo è equivalente alla prima nel caso si utilizzasse la media ponderata, pesando C_v con il numero di triple il cui nodo è centrale:

$$C = \frac{3 \cdot n_{\Delta}(G)}{n_{\wedge}(G)} = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i \cdot w_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Dove:

- $n_{\Delta}(G)$ è il numero di triangoli del grafo;
- $n_{\wedge}(G)$ è il numero complessivo di triple del grafo;
- w_i è il peso del vertice v_i (numero di triple in cui il nodo è centrale).

¹⁰R. D. Luce, A. D. Perry, "A method of matrix analysis of group structure, in *Psychometrika*", 1949, pp. 95–116

¹¹D. J. Watts, S. H. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-world' networks, in *Nature*", 1998, pp. 440–442,

Capitolo 3

Modello di Markowitz con l'utilizzo delle Complex Network per la gestione dei Fondi Pensione

3.1 Spiegazione del lavoro effettuato

L'obiettivo del lavoro è quello di calcolare un portafoglio applicando un algoritmo simile a quello di Markowitz e verificare che questo nuovo portafoglio risulti essere migliore rispetto a quello calcolato con il suo modello classico.

In quest'ultimo la matrice di correlazione viene usata direttamente per scrivere la funzione di rischio. In questo lavoro si utilizza la matrice di correlazione per elaborare una misura di rischio che tiene conto di diversi livelli di correlazione tramite l'utilizzo del local clustering coefficient.

Entriamo ora nella spiegazione della metodologia che descrive il problema di ottimizzazione. Per brevità noi delineremo la formulazione del problema che segue l'approccio alla rete dell'indice di correlazione di Pearson (PNA), ma la procedura può essere seguita anche per altri approcci (KNA e TNA).

Inizialmente la matrice Σ , matrice di varianze e covarianze, può essere convenientemente normalizzata definendo una nuova matrice:

$$\Omega = \frac{\Sigma}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2}$$

matrice diagonale con valori diagonali $s_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2}}$. Chiaramente, l'elemento s_i

considera il contributo della deviazione standard dei rendimenti i rispetto alla deviazione standard totale, calcolata in caso di indipendenza; e l'effetto della dipendenza è contenuto nella matrice Π .

Poiché la matrice di varianze e covarianze Σ è definita semipositiva, anche Ω è definita semipositiva, poiché entrambe hanno gli stessi autovalori.

Quindi il problema della minimizzazione del rischio può essere riformulato come segue:

$$\begin{cases} \min_x x^T \Omega x \\ e^T x = 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, N \end{cases}$$

Allora essendo agenti (di istituzioni finanziarie, ad esempio imprese, banche, assicurazioni o hedge funds) che fanno parte di un sistema complesso, dove tutte le attività sono correlate e questa correlazione è rappresentata tramite il coefficiente di Pearson allora con una rete complessa non orientata possiamo identificare la struttura delle correlazioni, dove ogni coppia di nodi i e risorse j sono collegate da un arco, in cui pesi degli archi sono definiti come:

$$w_{ij} = \begin{cases} \rho(R_i, R_j) & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per misurare il livello di interconnettività di un asset con tutto il sistema utilizziamo un coefficiente di raggruppamento. La definizione di coefficiente di raggruppamento, introdotta da Watts e Strogatz si riferisce al numero di triangoli esistenti attorno a un nodo rispetto al numero di quelli potenziali, fornendo una quantità adatta a spiegare come il nodo è incorporato nella struttura, in termini di connessioni. Questo è estremamente importante nel rivelare il sistema dei comportamenti, come ad esempio la propagazione dell'effetto contagio.

Tuttavia, essendo il nostro grafo completo, il classico coefficiente di clustering non è calcolabile dobbiamo adattarci alla misura del nostro quadro. Nello specifico, modifichiamo la matrice di adiacenza fissando una soglia $s \in [-1, 1]$ e definendo A_s , i cui elementi sono:

$$a_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{if } w_{ij} \geq s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A_s è la matrice di adiacenza che descrive i collegamenti esistenti nella rete aventi peso w_{ij} pari o superiore alla soglia s . L'idea è di catturare gli archi della rete che risultano essere prevalentemente più forti, in media, di tutti gli altri (cioè superiori ad una determinata soglia).

Quindi calcoliamo il coefficiente di clustering e ripetiamo il processo variando la soglia s . Il Clustering Coefficient C per il nodo i che corrisponde al grafo $C_i(A_s)$ con soglia $s \in [-1, 1]$

$$C_i = \int_{-1}^1 C_i(A_s) ds$$

Così $0 \leq C_i \leq 1$ è ben definito. Ora definiamo che la matrice C , i cui elementi sono:

$$C_{ij} = \begin{cases} C_i C_j & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché questa matrice rappresenta il livello di interconnessione di ciascuna coppia con il sistema, anziché la misurazione della correlazione classica delle coppie, possiamo interpretarla con una matrice di interconnessione.

Quindi, prendendo in considerazione tutte le ipotesi fatte, il problema di ottimizzazione può essere modificato come:

$$\begin{cases} \min_x x^T H x \\ e^T x = 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, N \end{cases}$$

Possiamo osservare che la funzione obiettivo è continua in un intervallo realizzabile, quindi almeno una soluzione del problema esiste. Come nel modello classico della minimizzazione della varianza, stiamo considerando sia la volatilità delle attività sia la dipendenza strutturale tra di loro. La differenza principale è dovuta all'uso della matrice di interconnessione che serve per considerare quante coppie delle risorse sono

correlate al sistema. In particolare, essendo C dipendente da una rete di misura del rischio sistemico (cioè il coefficiente di raggruppamento) stiamo implicitamente includendo una misura dello stato di stress del sistema finanziaria.¹²

Per poter spiegare più nel dettaglio il lavoro effettuato, qui di seguito, è riportata la spiegazione del codice utilizzato (si può consultare il codice completo nel Capitolo 7) Partendo sempre dalla matrice di correlazione, per prima cosa, vengono determinate delle soglie basate sul valore minimo e sul valore massimo della matrice di correlazione, cancellando i valori estremi, trovata.

Come secondo passaggio tramite un ciclo for viene applicata la soglia che cancella la riga e la colonna relativa al valore indicato dalla soglia stessa.

```
[...]  
X=CaricaDati1;  
n1=size(X,1);  
n2=size(X,2);  
Y=log(X(2:n1,:)./X(1:n1-1,:));  
B=corr(Y);  
m=min(min(B));  
M=max(max(B));  
soglie=(m:(M-m)/10:M);  
n=length(soglie);  
c1=zeros(n2,n2);  
[...]
```

Poi sulla nuova matrice, per ogni ciclo, viene applicata una funzione heaviside, che sostituisce, tramite un algoritmo di correlazione, un 1 se è presente una correlazione tra gli elementi altrimenti uno 0. Così otteniamo un grafo sul quale viene applicata la funzione di Local Cluster Coefficient.

```
[...]  
c1=[];  
for i=2:1:n-1;  
    HEA=sign heaviside(B-soglie(i));
```

¹² Gian Paolo Clemente, Rosanna Grassi, Asmetilda Hitaj (2019), "Asset allocation: new Evidence through network approaches"

```

    [acc,c] = avgClusteringCoefficient(HEA);
    cl(:,i-1)=c;
end
local_clu=mean(cl,2);
size(local_clu);
C=local_clu*local_clu';
for y=1:1:size(C,1);
    C(y,y)=1;
end
[...]
```

Essendo un ciclo otteniamo più vettori di LCC ai quali viene applicata la funzione di media aritmetica e in seguito vengono accorpati in un unico vettore, che moltiplicato per il suo trasposta da una matrice.

Ora, come ultimo passaggio, viene calcolato un elemento di correzione tramite la standard deviation, e ne viene calcolata la somma. Gli elementi del correttore si ottengono dividendo le singole deviazioni standard per la loro somma.

```

[...]
```

```

sigma=std(Y);
s=sum(sigma);
deltal=sigma/s;
D=zeros(size(C));
for y=1:1:size(C,1);
    D(y,y)=deltal(y);
end
[...]
```


Così infine otteniamo la funzione obbiettivo, che sarà: l'elemento correttivo moltiplicata la matrice di LCC che a sua volta sarà moltiplicata per il trasposto dell'elemento correttivo, in ultima fase questa funzione andrà minimizzata con il metodo di minimizzazione del rischio secondo il modello di Markovitz.

```
function z_clu=Tesi;
X=CaricaDatil;
n1=size(X,1); n2=size(X,2);
Y=log(X(2:n1,:)./X(1:n1-1,:));
z0=ones(n2,1)/n2;
B1=corr(Y);
B2=(B1+B1')/2;
portopt(mean(Y),B2);

H=CalcolaH;
A=[];B=[];Aeq=ones(1,n2);Beq=1;LB=zeros(n2,1);UB=ones(n2,1);
options=optimset('LargeScale','off','MaxIter',100,'TolX',0.0000000000000001,
'TolFun',0.0000000001,'MaxFunEvals',900000);
[z_clu,risk_clu]=fmincon(@(z)z'*H*z,z0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,[],options);

r_clu=mean(Y)*z_clu;
V=std(Y*z_clu);

hold on; plot(V,r_clu,"*")
end
```

3.1.II Spiegazione dei dati utilizzati

I dati sono stati raccolti dalla COVID ed integrati tramite Bloomberg. Tuttavia, per poterli utilizzare per il presente lavoro è stato necessario effettuare una selezione. Infatti, la tabella dei dati iniziali risultava essere incompleta e all'interno delle serie storiche risultavano mancanti alcuni valori riferiti a determinati mesi, in alcuni casi i dati mancanti riguardavano periodi lunghi anche uno o più anni.

Un primo lavoro, che è stato fatto, è stato cercare un equilibrio, che risultasse essere soddisfacente, tra intervallo storico da analizzare e numero di benchmark da prendere in considerazione. Dopo attente osservazioni e lunghi periodi di calibrazione si è deciso di scegliere un intervallo di tempo che va dal 15 febbraio 2016 al 15 febbraio 2019 per un totale di 10 Benchmark.

Una volta delineato con esattezza il periodo da analizzare purtroppo anche all'interno di questo intervallo risultavano mancanti, sporadicamente, alcuni dati. Quindi un secondo lavoro che è stato fatto è stato di completare il dataset tramite approfondite ricerche effettuate sulla piattaforma Bloomberg, che hanno portato dei risultati soddisfacenti.

In ultimo, poiché alcuni dati non erano reperibili sulla piattaforma utilizzata si è deciso, solo per casi rari, di eseguire una media aritmetica tra il valore precedente e il valore successivo del dato mancante.

Prendiamo in considerazione per raggiunger i nostri obiettivi, come detto in precedenza, 10 Benchmark: Comit Global che fa riferimento al mercato italiano telematico della Borsa italiana)¹, Ecp Global developed Esg Best in class equity che fa riferimento al World Developed Markets, Euro Stoxx che fa riferimento alla zona euro (è un indice azionario di titoli dell'eurozona)², Ftse 100 che fa riferimento al Regno Unito (è un indice azionario delle 100 società più capitalizzate quotate al London Stock Exchange)³, Ftse Mib che fa riferimento alla borsa italiana (è il più significativo indice azionario della Borsa italiana. È il paniere che racchiude di norma, tranne eccezioni, le azioni delle 40 società italiane, anche se hanno la sede legale all'estero, quotate sull' MTA

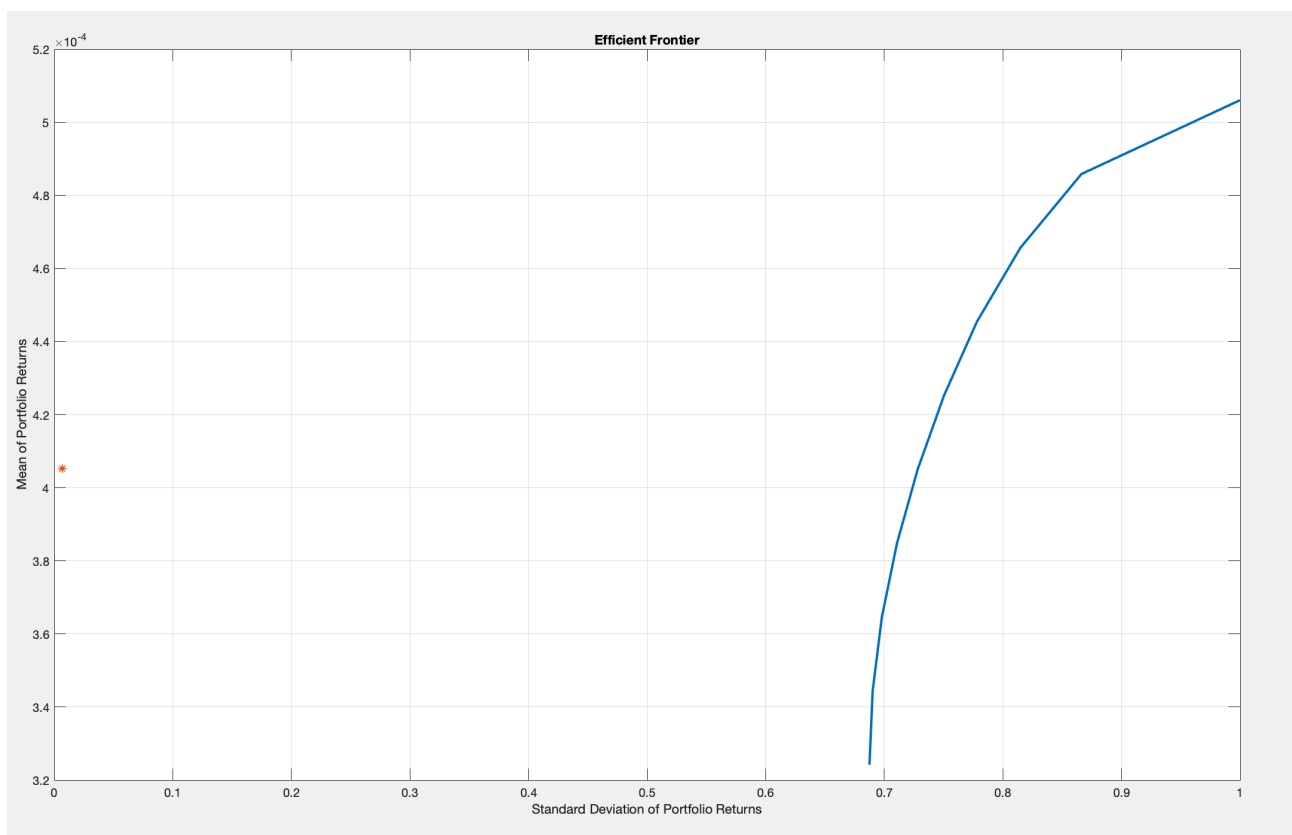
con maggiore capitalizzazione, flottante e liquidità)⁴, Msci All Country Europe che fa riferimento all'Europa all country (è un indice azionario europeo gestito appunto dalla società di servizi e informazioni finanziarie MSCI (Morgan Stanley Capital International), questo indice replica un paniere di azioni europee a larga capitalizzazione quotate su 15 mercati nazionali del Vecchio Continente)⁵, Msci Emerging Markets che fa riferimento ai mercati emergenti, Msci Europe che fa riferimento all'Europa, Msci North America che fa riferimento al nord America, Msci Pacific che fa riferimento alla zona del pacifico, Msci World che fa riferimento al mercato globale (è un indice di mercato azionario di 1612 titoli di livello globale)⁶.

3.II Risultati ottenuti

I risultati ottenuti, tramite la formula:¹³

$$\begin{cases} \min_x x^T H x \\ e^T x = 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, N \end{cases}$$

come si può osservare dal grafico sottostante, risultano essere molto soddisfacenti.



La frontiera efficiente, la curva in blu, calcolata tramite il modello di Markowitz definisce un portafoglio con un livello di rischio, definito dalla Standard Deviation, di circa 0.7.

Invece il punto, in arancione, che rappresenta il portafoglio calcolato tramite il modello di Markowitz con l'aggiunta delle Complex Network risulta essere a sinistra della frontiera efficiente con un rischio quasi nullo.

¹³ Gian Paolo Clemente, Rosanna Grassi, Asmetilda Hitaj (2019), "Asset allocation: new Evidence throught network approaches"

Questo ci indica che la gestione di portafoglio basata sull'utilizzo del Modello di Markowitz con l'aggiunta delle reti neurali risulta essere, nel nostro caso specifico, una gestione migliore, cioè meno rischiosa, rispetto alla gestione di portafoglio con il modello classico.

Questo da come si può dedurre è un risultato molto importante e innovativo perché tramite l'ausilio di un vecchio modello di gestione di portafoglio e la nuova idea di Complex Networks, che si sta facendo sempre più spazio nella nostra società, otteniamo una rischiosità quasi nulla per la gestione di questo portafoglio.

Codice Matlab

Questa funzione serve per caricare le serie storiche da usare da un foglio excel.

```
X=xlsread('Finale.xlsx', 'foglio 1', 'B27:GC811');
fd=fopen('CaricaDatil.m', 'w');
fprintf(fd, 'function X=CaricaDatil \n X=[');
for i=1:1:size(X,1)
    for j=1:1:size(X,2)-1
        fprintf(fd, '%7.2f, ', X(i,j));
    end
    fprintf(fd, '%7.2f \n', X(i, size(X,2)));
end
fprintf(fd, ' ];');
fclose(fd);
```

```
function X=CaricaDatil
X=[...]
```

Questa parte di codice serve per creare la nuova matrice, che nel modello classico corrisponderebbe alla matrice di varianze e covarianze, che poi verrà usata nel calcolo del portafoglio secondo il modello delle Complex Network.

```
function H=CaricaH
H=[...]
```

```
function H=CalcolaH
```

```
X=CaricaDatil;
n1=size(X,1);
n2=size(X,2);
Y=log(X(2:n1, :)./X(1:n1-1, :));
B=corr(Y);
m=min(min(B));
M=max(max(B));
soglie=(m:(M-m)/10:M);
n=length(soglie);
```

```

cl=zeros(n2,n2);
cl=[];
for i=2:1:n-1;
    HEA=sign heaviside(B-soglie(i));
    [acc,c]: avgClusteringCoefficient(HEA);
    cl(:,i-1)=c;
end
local_clu=mean(cl,2);
size(local_clu);
C=local_clu*local_clu';
for y=1:1:size(C,1);
    C(y,y)=1;
end

sigma=std(Y);
s=sum(sigma);
deltal=sigma/s;
D=zeros(size(C));
for y=1:1:size(C,1);
    D(y,y)=deltal(y);
end

H=D * C * D;
H=(H+H')/2;
%salva H
fd=fopen('CaricaH.m','w');
fprintf(fd,'function H=CaricaH \n H=[');
for i=1:1:size(H,1)
    for j=1:1:size(H,2)-1
        fprintf(fd,'%7.2f, ',H(i,j));
    end
    fprintf(fd,'%7.2f \n',H(i,size(H,2)));
end
fprintf(fd,' ]');
fclose(fd);
end

```

Questa parte rappresenta il cuore del codice e infatti qui viene minimizzata la funzione per ottenere le quote dei Titoli (Benchmark) da detenere in portafoglio.

```
function z_clu=Tesi;

X=CaricaDatil;
n1=size(X,1); n2=size(X,2);
Y=log(X(2:n1, :)./X(1:n1-1, :));
z0=ones(n2,1)/n2;
B1=corr(Y);
B2=(B1+B1')/2;
portopt(mean(Y),B2);

H=CalcolaH;
A=[];B=[];Aeq=ones(1,n2);Beq=1;LB=zeros(n2,1);UB=ones(n2,1);
options=optimset('LargeScale','off','MaxIter',100,'TolX',0.000000000000001,
'TolFun',0.0000000001,'MaxFunEvals',9000000);
[z_clu,risk_clu]=fmincon(@(z)z' * H * z,z0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,[],options);

r_clu=mean(Y)*z_clu;
V=std(Y*z_clu);

hold on; plot(V,r_clu, '*')
end
```


Bibliografia

Gian Paolo Clemente, Rosanna Grassi, Asmetilda Hitaj (2019), *“Asset allocation: new Evidence throught network approaches”*

Liverani M. (2014), *“Elementi di Teoria dei Grafi”*, Dispense del Corso di Ottimizzazione Combinatoria, Università Roma Tre.

Milgram, Stanley. (1974), *Obedience to Authority; An Experimental View*. Harpercollins

Ducan J. Watts e Steven Strogatz (1998), *“Collective dynamics of “small-world” networks”*, Nature, Vol.393

D. Luce, A. D. Perry, *“A method of matrix analysis of group structure, in Psychometrika”*, 1949, pp. 95–116

D. J. Watts, S. H. Strogatz, *“Collective dynamics of ‘small-world’ networks, in Nature”*, 1998, pp. 440–442,